

**RASHBA SPİN YÖRÜNGE ETKİLEŞMESİ
OLAN LENS ŞEKLİNDEKİ YARI
MANYETİK YARI İLETKEN KUANTUM
NOKTALARINDA, MANYETİK ALANIN
ETKİSİNDE ABSORBSİYON KATSAYISININ
HESAPLANMASI**

DR. MUSTAFA BALCI

EDİTOR

PROF. DR. ARİF BABANLI

EĞİTİM
yayınevi

RASHBA SPİN YÖRÜNGE ETKİLEŞMESİ OLAN LENS ŞEKLİNDEKİ YARI MANYETİK YARI İLETKEN KUANTUM NOKTALARINDA, MANYETİK ALANIN ETKİSİNDE ABSORBSİYON KATSAYISININ HESAPLANMASI

Dr. Mustafa BALCI

Editor: Prof. Dr. Arif BABANLI

Genel Yayın Yönetmeni: Yusuf Ziya Aydoğan (yza@egitimyayinevi.com)

Genel Yayın Koordinatörü: Yusuf Yavuz (yusufyavuz@egitimyayinevi.com)

Sayfa Tasarımı: Eğitim Yayınevi Grafik Birimi

Kapak Tasarımı: Eğitim Yayınevi Grafik Birimi

T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı

Yayıncı Sertifika No: 76780

E-ISBN: 978-625-5971-37-1

1. Baskı, Aralık 2024

Kütüphane Kimlik Kartı

RASHBA SPİN YÖRÜNGE ETKİLEŞMESİ OLAN LENS ŞEKLİNDEKİ YARI MANYETİK YARI İLETKEN KUANTUM NOKTALARINDA, MANYETİK ALANIN ETKİSİNDE ABSORBSİYON KATSAYISININ HESAPLANMASI

Dr. Mustafa BALCI

Editor: Prof. Dr. Arif BABANLI

VIII+107 s., 165x240 mm

Kaynakça var, dizin yok.

E-ISBN:978-625-5971-37-1

Copyright © Bu kitabın Türkiye'deki her türlü yayın hakkı Eğitim Yayınevi'ne aittir. Bütün hakları saklıdır. Kitabın tamamı veya bir kısmı 5846 sayılı yasanın hükümlerine göre kitabı yayımlayan firmanın ve yazarlarının önceden izni olmadan elektronik/mekanik yolla, fotokopi yoluyla ya da herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılamaz, yayımlanamaz.

EĞİTİM

yayınevi

Yayınevi Türkiye Ofis: İstanbul: Eğitim Yayınevi Tic. Ltd. Şti., Atakent mah. Yasemen sok. No: 4/B, Ümraniye, İstanbul, Türkiye

Konya: Eğitim Yayınevi Tic. Ltd. Şti., Fevzi Çakmak Mah. 10721 Sok. B Blok, No: 16/B, Safakent, Karatay, Konya, Türkiye
+90 332 351 92 85, +90 533 151 50 42, 0 332 502 50 42
bilgi@egitimyayinevi.com

Yayınevi Amerika Ofis: New York: Eğitim Publishing Group, Inc.
P.O. Box 768/Armonk, New York, 10504-0768, United States of America
americaoffice@egitimyayinevi.com

Lojistik ve Sevkiyat Merkezi: Kitapmatik Lojistik ve Sevkiyat Merkezi, Fevzi Çakmak Mah. 10721 Sok. B Blok, No: 16/B, Safakent, Karatay, Konya, Türkiye
sevkiyat@egitimyayinevi.com

Kitabevi Şubesi: Eğitim Kitabevi, Şükran mah. Rampalı 121, Meram, Konya, Türkiye
+90 332 499 90 00
bilgi@egitimkitabevi.com

İnternet Satış: www.kitapmatik.com.tr
+90 537 512 43 00
bilgi@kitapmatik.com.tr

 **kitapmatik**
İnternetteki kitapçınız

ÖN SOZ

Bu kitapta elipsoidal kuantum noktasının optik özelliklerine ilişkin sorunlar teorik olarak incelenmektedir. Kitap, yazarın doktora tezini yazarken ortaya koyduğu teorik bulguları içermektedir. Kitabın teorik bölümü büyük bir ayrıntı ve açıklıkla ele alınmıştır. Matematiksel hesaplamalar mümkün olduğunca ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Sonuçları görüntülemek için grafikler kullanılmıştır.

Kitabın beş bölümü vardır. Kitap bir girişle başlar. Düşük boyutlu kuantum sistemlerinde gerçekleşen fiziksel süreçlerin temel fikirleri, kitabın bu bölümünde okuyucuya sunulur. Düşük boyutlu yarı iletken hetero yapıların arayüzünde ve bir bulk yarı iletken farklı şekilde ortaya çıkan spin-orbit etkileşiminin mekanizmasına özel vurgu yapılır. Kitabın ikinci bölümü, kitabın bu konusu hakkında kısa bir literatür incelemesi sunar. Kitabın üçüncü bölümünde, elipsoidal bir kuantum noktası matematiksel olarak tanımlanır. Sistemin Hamiltoniyeni belirlenir ve Schrödinger denklemi çözülür. Denklem çözülerek, elektronun enerji spektrumunu ve dalga fonksiyonunu elde edilir. Daha sonra, elde edilen ifadeyi kullanarak, bant içi optik geçiş için optik soğurma katsayısı bulunur. Kitabın dördüncü bölümü, soğurma katsayısının, sistemin iç ve dış özelliklerindeki değişimlere bağlı olarak gelen foton enerjisiyle nasıl değiştiğini grafikler halinde göstermektedir. Soğurma katsayısının, parametrelerdeki değişimlere bağlı davranışının incelenmesinin bulguları kitabın son bölümünde sunulmaktadır.

Spintronik, düşük sıcaklık fiziği, düşük boyutlu kuantum yapıların fiziği ve düşük boyutlu kuantum yapılarda spin-yörünge etkileşimi alanlarında çalışan araştırmacılar için bu kitap faydalı olacaktır. Bu kitabın yazımında bana yardımcı olan herkese şükranlarımı sunarım.

Dr. Mustafa BALCI

Isparta, 2024

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
3. TEORİK BİLGİLER	9
3.1. Bant Teorisi.....	9
3.2. Kuantum Nokta.....	16
3.3. Rashba Spin-Yörünge Etkileşimi.....	22
3.4. Seyreltilmiş Yarımanyetik Yarıiletken Yapılar (DMS)	28
3.5. Elipsoid Kuantum Noktanın Enerji Spektrumu ve Dalga Fonksiyonu	29
3.5.1. Elipsoid kuantum noktanın Hamiltonyen'i	29
3.5.2. Schrödinger denkleminin çözümü.....	38
3.5.3. Toplam Hamiltonyen'e karşılık gelen Schrödinger denkleminin çözümü	44
3.5.4. Toplam Enerji Spektrumun Elde Edilmesi.....	50
3.6. Soğurma Katsayı.....	53
3.6.1. Düşük boyutlu kuantum yapılarda optik geçişler.....	53
3.6.2. Bantlar içi optik geçişler.....	57
4. BULGULAR	69
4.1. Hesaplamalarda Kullanılan Değerler	69
4.2. Bantlar İçi Optik Geçişler İçin Bulgular.....	69
4.3. Rashba Parametresinin Sıfır Durumunda Bantlar Arası Optik Geçişler....	84
5. SONUÇ.....	99
KAYNAKLAR	103

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

A	Vektör potansiyeli
B	Manyetik alan vektörü
$B_{5/2}(\xi)$	Brillouin fonksiyon
E	Elektrik alan vektörü
E_z	“Hızlı” alt sistemin enerji spektrumu
E	Toplam enerji spektrum
F	Kuvvet vektörü
${}_1F_1(a, b, c)$	Dejenere hypergeometrik fonksiyon
$H_1(z)$	“Hızlı” alt sistemin Hamiltonu
$H_2(\rho)$	“Yavaş” alt sistemin Hamiltonu
H_Z	Zeeman etkileşimi
H_R	Rashba spin-yörünge etkileşimi
H_{SO}	Spin-yörünge etkileşimi
H	Hamilton
H_{DMS}	Seyreltilmiş yarımmanyetik yarıiletken etkileşimi
L_0	Elipsoidin küçük yarı ekseninin uzunluğu
$L_n^m(x)$	Laguerre polinomları
R_0	Elipsoidin büyük yarı eksenin yarıçapı
$R(\rho)$	“Yavaş” alt sistemin dalga fonksiyonu
T	Sıcaklık
$U(\rho, z)$	Sınırlayıcı potansiyel
c	Işık hızı
e	Polarizasyon vektörü
e	Elektronun yükü
g	Lande faktörü
g^*	Etkin lande faktörü
g_{Mn}	Mn atomunun Lande faktörü
k	Dalga vektörü
k_B	Boltzmann sabiti

m	Manyetik kuantum sayısı
n_0	Kırılma indisi
n	“Hızlı” alt sisteminin enerji seviyelerini belirleyen kuantum sayı
n_ρ	“Yavaş” alt sisteminin enerji seviyelerini belirleyen kuantum sayısı
\mathbf{p}	Momentum vektörü
\mathbf{p}_{if}	Momentum operatörünün matris elemanı
$u_{n_i}(\mathbf{r})$	Bloch fonksiyonu
λ	Dalga boyu
μ_0	Elektronun kütlesi
μ_B	Bohr magnetonu
$\hat{\sigma}$	Pauli matris vektörü
∇	Nabla operatörü
α_R	Rashba parametresi
\hbar	Plank sabiti
$\psi(\rho, \phi, z)$	Dalga fonksiyon
$\chi_\rho(z)$	“Hızlı” alt sistemin dalga fonksiyonu
μ	Etkin kütle
Φ	Manyetik akı
x	Mn atomunun konsantrasyonunu belirleyen parametre
Ψ	Toplam dalga fonksiyon
ω_c	Siklotron frekansı
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyon
$(x)_m$	Pochhammer fonksiyonu
$\alpha(\omega)$	Soğurma katsayısı
ω	Frekans
ϵ_0	Elektrik geçirgenlik sabiti
$\delta(x)$	Dirac delta fonksiyonu
δ_{n_f, n_i}	Kronecker deltası

1. GİRİŞ

Son yıllarda gelişen teknolojiye bağılı olarak hesaplama tekniklerinde de hızla ilerlemeler kaydedilmiş ve bunun sonucu olarak bilgisayarların hesaplama hızları yükselmiş ve mikro sistemlerin büyüklüğüne (10^{-7} m) bağılı olarak ileri bir seviyeye ulaşmıştır. Klasik fizik yasalarının uygulanabildiği mikro dünyanın sınırı olan 10^{-7} m'yi aştığında ve bilgisayarların hesaplama hızları arttığında yepyeni bir fiziksel dünyadan bahsedilir. Bu fiziksel dünya nano dünyadır. Nano dünyada daha önceki bilinen mikro dünyadan çok farklı fiziksel anlamlarla karşılaşmaktadır. Bu nano dünyadaki en önemli fark mikro dünyada olmayan kuantum etkilerinin olmasıdır. Günümüzde kullanılan ileri teknolojiye sahip cihazlar şimdiye kadar kullanılan ilkelerden farklı olarak yeni ilkelere dayanarak çalışmaktadır (Çakmaktepe, 2006).

Nano kelime anlamı ile herhangi bir fiziksel büyüklüğün bir milyarda biri olarak tanımlanır. Nanoyapılar uzunluk olarak, yaklaşık olarak 10 ile 100 atomun oluşturduğu bir sisteme karşılık gelmektedir. Bu boyuttaki sistemlerde mikro sistemlere göre farklı fiziksel özellikler gözlemlenmektedir. Nanobilim ve nanoteknoloji olarak adlandırılan bu yeni özellikler, yaklaşık 30 yıldır dünyada ülkelerin ekonomik, askeri, sivil ve teknolojik gelişmelerinde stratejik öneme sahiptir. Son yıllarda uzay teknolojilerinin gelişiminde önemli kullanım alanlarına ulaşmıştır (Çakmaktepe, 2006).

Nano boyuttaki malzemelerin fiziksel özelliklerinin değişmesi ile makroskopik ölçekten tamamen farklı birçok yeni ve yararlı özellikler ortaya çıkmıştır. Nano boyuttaki malzemelerin kuantum özellikleri, klasik fizikten farklı olarak iletim özelliklerinin (momentum, enerji ve kütle) sürekli değil kesikli değerler alacağı, benzer değişim özelliklerinin optik, elektronik, manyetik ve kimyasal özelliklerinde de gözlemlenmektedir. Maddeler nano boyutta işlenerek ortaya çıkan yeni özellikler kullanılarak, nano-ölçekte yeni teknolojik aygıt ve malzemeler yapmak mümkün hale gelmiştir. En önemli uygulama alanları, tarama tünelleme ve atomik kuvvet mikroskopları kullanılarak yüzey üzerindeki atomları birbirlerinden ayırmaları ve bu ayrılan atomları istenilen şekillerde yerleştirilmelerinin mümkün hale gelmesidir. Nanoteknolojiyi 19. yüzyılda gerçekleşen Sanayi Devrimi'nin oluşturduğu

değişime benzer bir dönüşüme eşdeğer olduğunu kabul edebiliriz. Bu yeni devrim, bilim ve teknolojiye bambaşka bir dünyanın kapısını açmıştır. Bu yeni dünyada atom ve moleküllerin istenilen şekillerde dizinimi ile tek molekülden oluşan transistörler ve elektronik aygıtlar elde edilmiştir. Yapılan bütün çalışmalar elektronik, fizik, kimya, malzeme bilimi, optik, uzay bilimleri ve tıp alanlarında büyük bir çığır açmıştır (Çakmaktepe, 2006).

Nanoteknolojinin gelişimi ile elde edilen hızlı teknolojik gelişmeler kuantum fiziğinin uygulamalarının bir sonucudur. Yarıiletkenler elektroniğinde yapay kuantum noktalarını ve yapay kuantum tellerinin oluşturulabilmesi kuantum mühendisliğinin bir sonucudur. Bu yeni kuantum yapılar kullanılarak süper bilgisayarlara mikroskop altında bakılabilecek, insan vücudundaki hastalıklı dokular bulup iyileştirilecek ya da sağlıklı dokular ile hastalıklı dokular ayırt edilerek nano robotlar tarafından ameliyat yapılabilecektir. Hastalıklar daha ilk safhalarında teşhis edilebilecek ve tedavisi hastalık daha kendini göstermeden yapılabilecektir. Bu yeni teknolojiden faydalanılarak insan beyni hafızasına ek nano hafızalar ile beyin gücü artırılabilir. Nanoteknolojinin gelişimi ile üretimden tüketime kadar çevreye dost nano parçacıklar ile çevrenin korunmasına önemli katkılar sunulacaktır. Malzeme bilimi ile akıllı malzemelerin elde edilmesi mümkün olacak, daha hafif, daha dayanıklı malzemeler üretilerecektir. Bu malzemeler, yaklaşık olarak birim ağırlık başına 50 kat daha hafif olabilecek ve kullanım ömürleri daha uzun olacaktır. Sanayi başta olmak üzere birçok endüstriyel alanda kir tutmayan ve temizlenebilen boyalar, üzerinde sıvı tutmayan ve kırışmayan kumaşlar elde edilmiştir. Nanoteknoloji ile ulusal güvenlik alanında da yeni gelişmeler sağlanmakta, elektronik ve yazılım alanındaki gelişmeler ile savunma sanayinde, haberleşme ve gizlilik konularında ileri teknolojiye ulaşılmaktadır. Malzeme bilimiyle birlikte daha hafif ve daha dayanıklı yeni askeri teçhizatlar üretilmektedir.

İnce bir yarıiletken tabakasında yük taşıyıcılarının (elektron ve holler) sınırlandırılması sonucu, boyutların küçülmesiyle elde edilen iki boyutlu kuantum kuyuları, tek boyutta kuantum telleri ve boyutsuz kuantum noktalarının yarıiletkenin davranışlarında köklü değişikliklere neden olduğu görülmüştür. Bu yapıların boyutları De Broglie dalga boyu mertebesinde olduğundan enerji kuantumlanır ve boyuta göre kuantumlanmış pek çok enerji seviyesi gözlenir. Bu sebeple son zamanlarda kuantum nanoyapıların enerji spektrumlarını ve optik özelliklerini hem teorik hem de deneysel olarak araştırmak çok popüler bir alan olmuştur (Bimberg vd., 2001).

Yapıları, enerjileri ve birim enerji aralığındaki izinli durumların sayısını veren durum yoğunluğu ile ilgili olarak bulk yapılar, kuantum kuyular, kuantum telleri ve boyutsuz kuantum noktaları elde edilmektedir. Bu yapılar;

potansiyelin olmadığı bulk yapılarda boyutlarda sınırlama olmadığı için enerji ve durum yoğunluğu sürekli, potansiyelin tek boyutta uygulanması ile elde edilen kuantum kuyuları iki boyutlu kristaller olup enerjileri bir boyutta kuantumlanmıştır. Potansiyelin iki boyutta uygulanması ile kuantum telleri elde edilmekte ve enerji iki boyutta kuantumlanmaktadır. Düşük boyutlarda x,y,z yönlerinde potansiyelin uygulanması ile boyutsuz kuantum noktaları elde edilmektedir. Kuantum noktanın enerji üç boyutta da kuantumlanmaktadır (Harrison, 1999; Çakmaktepe, 2006).

Yarıiletkenlerde spin yönelimleri özellikle bilgi kodlamada polarize edilmiş spin elektronları taşıma ise bilgi işletim sistemlerinde önemli bir yer tutmaktadır. Elektronun spin durumunu ve yükünü dikkate alarak tasarlanan malzemelere, spintronik malzemeler denir. Spintroniğin en çok kullanıldığı alanlar, çok katlı nano yapıları manyetik ince film şeklinde bilgisayarlarda sabit disk okuyucu kafalarında ve manyetik RAM'lerde kullanılırlar. Spintronik malzemeler üzerine yapılan araştırmalar, yüksek hızda yeni nesil güç tasarruflu elektronikler ve yüksek kapasiteli bellek hücreleri geliştirmek için son yıllarda oldukça yoğun olarak çalışılmaktadır. Spintronik cihazlar geliştirilerek, mikroelektronikte önemli ilerlemeler sağlanmıştır. Mikroelektronikteki en önemli gelişmeler, hızların artması, daha hızlı başlangıç zamanı ve daha büyük veri depolama kapasiteleridir. Spintronik için seyreltilmiş manyetik yarıiletkenler, mikroelektronik cihazların içine entegre edilmesinden dolayı uygun bir malzeme olmaktadır (Liu H vd, 2011). Seyreltilmiş yarımanyetik yarıiletkenler (Diluted magnetic semiconductors, (DMS)) yarıiletken alaşımının içerisindeki bir kısım manyetik olmayan atomların yerine manyetik atomların gelmesiyle oluşur (Jiang vd., 2011). Çalışmalarda spintroniklerin potansiyel kullanımları sebebiyle iki çeşit Mn katkılı seyreltik manyetik yarıiletkenlerin II-VI (CdTe ve ZnSe) ve III-V (GaAs) bileşiklerine uygulamaları incelenmiştir (Huang vd., 2006). Spintronik uygulamalar, oda sıcaklığında ferromanyetizma özelliği gösteren filmlerin keşfi ile önemli bir başarı elde edilmiştir (Huang vd., 2006). Spin yönelimleri yarıiletkenlerde bilgi kodlama, polarize edilmiş spin elektronları taşıma gerçekleştirilebilmekte ve bu nedenle günümüzde bilgi işletim sistemlerinin temelinde olmaya alternatiftir (Appelbaum, 2009). Bu tip elektronun spinini ve yükünü kullanan malzemeler ise genel olarak, "spin transferinden kaynaklı elektronik" (spintronik) malzemeler olarak adlandırılmaktadır (Can, 2011). Spintroniğin en çok kullanılan örnekleri, bilgisayarlarda sabit disk okuyucu kafalarında ve manyetik RAM'lerde kullanılan, çok katlı nano yapıları manyetik ince filmlerdir.

Rashba spin-yörünge etkileşimi spintronik cihazlarının fiziksel temelini oluşturmaktadır (Bercieux ve Lucignano, 2015). Rashba etkisi ilk olarak iki-boyutlu (2B) elektron gazında incelenmiştir (Bychkov ve Rashba, 1984).

Rashba etkisinin ortaya çıkması, güçlü spin-yörünge etkileşmesinin varlığına ve evirme simetrisinin yokluğuna bağlıdır. Son yıllarda yapılan çalışmalar Rashba etkisinin fiziğin birçok alanında etkin olarak kullanıldığını göstermekte ve gelecekte geliştirilecek spintronik cihazların temelini oluşturacağı kabul edilmektedir.

Bu tez çalışması beş bölüm ihtiva etmektedir. Birinci bölümde, konunun önemine vurgu yapan nano yapılar, yarıiletkenler, yarımnyetik yarıiletkenler, Rashba etkisi ve spintronik çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm, çalışma kapsamı çerçevesinde yapılan çalışmaları özetleyen kaynak özetleri bulunmaktadır. Üçüncü bölümde teorik bilgiler; bant teorisi, kuantum nokta, Rashba spin-yörünge etkileşimi, seyreltilmiş yarımnyetik yarıiletken yapılar ile elipsoid potansiyele sahip yarımnyetik yarıiletken kuantum noktanın Hamiltoniyen'i, dalga fonksiyonu, enerji spektrumu ve soğurma katsayısı yer almaktadır. Dördüncü bölümde soğurma katsayısının hesaplanması, beşinci bölümde bulgular, lens şeklindeki kuantum noktanın bant içi soğurma katsayısının, manyetik alan, uzunluk parametreleri, sıcaklık, Rashba parametresi ve mangan atomunun konsantrasyonuna göre grafikleri elde edilmiştir. Ayrıca Rashba parametresinin sıfır olduğu durumda bantlar arası soğurma katsayısının, manyetik alan, sıcaklık, uzunluk parametrelerine göre enerji grafikleri hesaplanan üçüncü bölümdeki matematiksel ifade ile elde edilen grafik, analizler ve karşılaştırmalar toplu olarak verilmiştir. Son bölümde ise, elde edilen sonuçların karşılaştırılması, yorumlanması ve bu teorik çalışma sonucu elde edilen bilgilerin deneysel anlamda teknolojik uygulamaları özetlenmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Sasaki vd. (1998), çalışmalarında yatay sınırlama potansiyelindeki anizotropinin kuantum noktadaki spin durumlarına olan etkisi araştırılmıştır. Araştırmasında, manyetik alanın etki etmediği durumda kabuk yapısı ve Hund kuralı gibi dairesel geometriye sahip kuantum noktalarında görülen özellikler elipsoid geometriye sahip kuantum noktalarında bu özellikler değiştiği görülmüştür. Ayrıca akım yönüne dik yönde uygulanan manyetik alanın etkisi altında gerçekleştirilen Zeeman etkisi ölçümü ikinci kabuğun yarısı dolu olduğunda ($N = 4$) elipsoid kuantum noktada spin-singlet durumuna ulaşıldığı sonucuna varılmıştır.

Austing vd. (1999) çalışmalarında birkaç elektronlu elipsoid ve dairesel geometriye sahip kuantum noktaların $T = 0K$ sıcaklığındaki enerji spektrumlarını araştırmışlardır. Ölçülen enerji spektrumları spin yoğunluk-fonksiyonel teori kapsamındaki model hesaplamaların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Yanal harmonik sınırlama potansiyelin dönme simetrisinden dolayı, dairesel geometriye sahip kuantum noktalarında belirgin kabuk yapısı olduğu tespit edilmiştir. Kuantum noktanın tek parçacıklı seviyelerin yozlaşmalarının kaldırılmasıyla birlikte, küçük deformasyon bile noktanın kabuk yapısını kökten değiştirdiği ve enerji spektrumunun önemli değişikliklere yol açtığı bulunmuştur. Ayrıca dairesel kuantum noktada dairesel simetrisinin bozulması ile toplam spinin değiştiği de tespit edilmiştir. Makalede akıma paralel olarak uygulanan, manyetik alanla yapılan ölçümler, $T = 0K$ 'deki $N = 5$ spin durumunun, dairesel nokta için orta düzeyde deformasyon nedeniyle bir geçişe uğradığı doğrulanmıştır. Bu ise ikinci kabuk yarı dolu olduğunda Hund'un birinci kuralına göre spin-triplet durumunu vermektedir. Eliptik kuantum noktalar için ise spin-singlet durumunu verdiği tespit edilmiştir.

Cantele vd. (2000) elipsoid kuantum noktadaki yüklü parçacığın hareketini incelemişlerdir. Yüklü parçacığın hareketini hem sayısal hem de varyasyonel yöntemleri kullanarak Schrödinger denklemini çözerek elde etmişlerdir. Kullanılan bu iki yöntemin sonuçları, elipsoid yarı eksenleri değiştirilerek karşılaştırılmıştır. Elipsoid kuantum noktalarındaki anizotropi etkileri hem hacimle sınırlı hem de topolojik yüzey durumları için araştırılmıştır. Elde

edilen sonuçlara göre, hacimle sınırlı enerji seviyesi yapısının küresel kuantum noktasına göre değiştiğini, özellikle $l = 1$ durumlarının bölünmesine yol açtığı gösterilmiştir. Sabit hacimli yapılara göre hacimle sınırlı enerjiler karşılaştırılmıştır. Anizotropi derecesi yüksek olduğunda daha büyük değerlere sahip olmaktadır. Bu da hacim etkileri ile sistem geometrisi arasındaki güçlü korelasyona dair kanıt sağladığı sonucuna varılmıştır.

Diğer bir çalışmada ise Cantele vd. (2001) tek elektronlu elipsoid kuantum noktanın optik özelliklerini araştırmışlardır. Çalışmada yazarlar eğrisel koordinat sistemini kullanarak etkin kütle yaklaşım modeli çerçevesinde elektronun enerji spektrumunu ve dalga fonksiyonunu hesaplamışlardır. Elipsoid yapının bantlar içi dipol matris elemanları hesaplanmış ve optik geçişler ile ilgili seçim kuralı elde edilmiştir. Elipsoid kuantum noktanın geometrik şeklinin değişiminin optik geçişlere olan etkisi bulunmuştur. Yani, optik geçiş enerjilerinin sistem anizotropisine güçlü bir bağımlılığının yanı sıra gelen ışığın polarize yönüne bağlı olduğunu göstermişlerdir.

Dvoyan vd. (2005) çalışmalarında pertürbasyon teorisi çerçevesinde ve elipsoidal simetriye sahip herhangi bir sınırlayıcı potansiyel için, elektronun zayıf yassı elipsoidal kuantum noktasındaki enerji durumları araştırmışlar. Parçacık enerji spektrumu için analitik ifadeler, elektronun etkin kütlelerinin ortamda ve kuantum noktasında farklı olduğu dikkate alınarak elde edilmiştir. Elde edilen ifadeler sonlu yükselime sahip dikdörtgen kuantum kuyusu durumuna uygulanmış. Kuantum noktanın enerji seviyelerinin geometrik parametrelerine bağımlılığı araştırılmıştır. Özellikle, pertürbasyon teorisinin birinci derecesinde, enerji düzeltmesinin kuantum noktasının azaltılmış yarıçapına bağımlılığının bir maksimuma sahip olduğunu gösterilmiştir.

Ferreira vd. (2006) çalışmalarında *CdSe* yapılı elipsoid kuantum noktanın enerji spektrumunu ve optik özelliklerine yer vermişlerdir. Bu çalışmada etkin kütle yaklaşımı kullanılarak enerji spektrum ifadesi elde edilmiştir. Optik özellikleri ise Fermi'nin altın kuralına dayanarak araştırmışlardır. Araştırmada elektronun enerji yapısı ve bantlar arası optik geçişler elipsoidal kuantum noktanın en boy oranına bağlı olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Chen vd. (2012) makalelerinde safsızlık ve elektrik alan gibi etkilerin varlığında elipsoidal sınırlandırma potansiyeline sahip *GaAs/AlGaAs* yapılı kuantum noktanın ikinci dereceden doğrusal olmayan optik düzeltme katsayısını teorik olarak araştırmışlardır. Makalede uygun bir koordinat dönüşümü ve pertürbasyon teorisi kullanarak etkin kütle yaklaşımı çerçevesinde elektronun enerji spektrumu elektrik alan ve safsızlık etkileri dikkate alınarak hesaplanmıştır. Elipsoidal kuantum noktanın ikinci dereceden doğrusal olmayan optik düzeltme katsayısını gelen fotonun bir fonksiyonu olarak araştırılmıştır.

Hesaplama sonuçları, uygulanan elektrik alanın artmasıyla ikinci optik düzeltme katsayısının değerlerinin artması gözlemlenmiştir. Ancak eliptik sabitin ve sınırlandırma potansiyelinin şiddetinin azalması optik düzeltme katsayı değerini azaltmaktadır. Ayrıca optik düzeltme katsayısının maksimumu donör safsızlık varken daha yüksek enerjiye doğruya kaymakta (maviye kayma), bunun aksine akseptör safsızlık varken maksimum kırmızıya doğru kaymaktadır.

Sadeghi ve Alirezaie (2013) çalışmalarında polarize lazer alanının varlığında parabolik sınırlama potansiyeline sahip elipsoidal kuantum noktanın optik özellikleri araştırmışlardır. Çalışmada yazarlar etkin kütle yaklaşımı çerçevesinde, parabolik bir sınırlama potansiyeli ve eliptik olarak polarize edilmiş bir lazer alanının birleşik etkisi altındaki bir elektron enerji spektrumunu elde etmişler. *GaAs / AlGaAs* yapıları için uygun bir koordinat dönüşümü kullanılarak parabolik sınırlama potansiyeline sahip elipsoidal bir kuantum noktasında doğrusal, doğrusal olmayan, toplam soğurma katsayıları ve toplam kırılma indisinin değişimi hesaplanmıştır. Elipsoidal kuantum noktanın polarize lazer alanı altında foton enerjisi, osilatör gücü ve elipsoid parametresi açısından optik soğurma katsayısı ve kırılma indisi araştırılmıştır. Çalışmadaki elde edilen sonuçlara göre soğurma katsayısı ve kırılma indisi sınırlama kuvvetine, gelen foton enerjisine ve elipsoidal parametreye bağlı olduğu görülmüştür. Ayrıca, eliptik parametresinin ve osilatör gücünün artmasıyla toplam soğurma katsayısının arttığı görülmüştür. Kırılma indisindeki bağlı değişim, elipsoid parametresi arttıkça artar sonucuna varılmıştır.

Sadeghi ve Moradi Lm (2016) bir diğer makalelerinde ise iki elektron içeren çift elipsoidal kuantum noktanın optik özelliklerini araştırmışlardır. Çalışmada yazarlar etkin kütle yaklaşımı çerçevesinde iki elektronlu Schrödinger denklemini çözmüşlerdir. Kuantum sistemin enerji spektrumunu ve dalga fonksiyonunu elde etmişlerdir. Elde edilen ifadeleri kullanarak soğurma katsayısının lineer ve üçüncü dereceden lineer olmayan ifadelerini bulmuşlardır. Ayrıca, bu sistem için lineer ve üçüncü dereceden lineer olmayan kırılma indisi ifadesini bulmuşlardır. Eliptik sabitin farklı değerleri için elektron-elektron etkileşiminin soğurma katsayıları üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Çalışmada pertürbasyon yöntemi kullanılarak, eliptik sabitin farklı değerlerine göre soğurma katsayısı, grup hızı ve grup indeksi, gelen fotonun enerjisinin bir fonksiyonu olarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, çift elipsoidal kuantum noktanın soğurma katsayısının eliptik sabitin değerinin artmasıyla arttığı ve soğurma maksimumunun gelen foton enerjisine göre sola kaydığı yani daha düşük enerjiye kaydığı görülmüştür.

Zamani vd. (2017) çalışmalarında elektrik alan, manyetik alan, Rashba ve Dresselhaus spin-yörünge etkileşimleri gibi etkileri altında elipsoidal kuantum optik özelliklerini araştırmışlardır. Çalışmada yazarlar soğurma katsayısının

ve kırılma indisinin lineer ve lineer olmayan üçüncü terimlerini analitik yöntemlerle hesaplamışlardır. Sonuçlara göre Rashba ve Dresselhaus spin-yörünge etkileşimleri elipsoidal kuantum noktanın elektron yapısını ve optik özelliklerini etkilediğini tespit etmişlerdir. Ayrıca, Zeeman ve spin-yörünge etkisi elektronun yapısındaki dejenereliği ortadan kaldırır. Manyetik alanın artmasıyla eski dejenere enerji seviyelerinin ayrılmasını artırır ve böylece enerji spektrumunda çapraz geçiş tespit edilir. Manyetik alanın artması ile soğurma katsayısının maksimumu değeri artmakta ve fotonun enerjisi maviye kaymaktadır. Kırılma indisinin grafiği ise fotonun enerjisi kırmızıya kayarak azalmaktadır. Elektrik alanın artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu artmakta ve fotonun enerjisi kırmızıya kaymaktadır. Kırılma indisi ise artarak kırmızıya kaymaktadır. Elipsoid kuantum noktanın boyut parametrelerinin artması soğurma katsayısının ve kırılma indisinin kırmızıya kaymasına neden olmaktadır. Rashba gücünün artması eğrilerde kırmızıya kaydırır ve tepe değerini artırır.

Babanlı vd. (2023) makalelerinde seyreltilmiş yarımmanyetik yarıiletken elipsoidal kuantum noktanın optik özellikleri araştırılmıştır. Etkin kütle yaklaşımı kullanarak kuantum noktanın enerji spektrumu ve dalga fonksiyonu hesaplanmıştır. Bantlar arası optik geçişler için soğurma katsayı ifadesi elde edilmiştir. Soğurma katsayısının gelen foton enerjisinin fonksiyonu olarak sıcaklık, manyetik alan ve Mn atomunun konsantrasyonu gibi parametrelere göre değişimi araştırılmıştır. Böylece elde edilen sonuçlara göre manyetik alanın artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu artmakta ve fotonun enerjisi maviye kaymaktadır. Sıcaklığın artmasıyla soğurma maksimumu artmakta ve fotonun enerjisi kırmızıya kaymaktadır. Son olarak Mn atomunun konsantrasyonunun artmasıyla soğurma maksimumu artmakta ve fotonun enerjisi maviye kaymaktadır.

3. TEORİK BİLGİLER

3.1. Bant Teorisi

Katıların nano boyutta elektron enerji spektrumu üzerine yapılan son araştırmalar, katı hal fiziğinin en dinamik alanlarından birini oluşturmaktadır. Böylece, hem yeni yarıiletken malzeme hazırlama teknolojilerindeki ilerlemeler hem de bant teorisindeki hesaplama yöntemlerindeki hızlı gelişmeler gelişen teknolojilerdeki yaygın kullanımı desteklemektedir. Bilim dünyasının saygın dergilerin hemen hemen her sayısında, özellikle mevcut deneysel verilerin iyileştirilmesine yönelik veya yeni malzemelerin bant parametrelerini, bant yapılarına yönelik makaleler yayınlanmaktadır.

Bant teorisinin tam olarak bilinmesi, sadece katı hal fiziğinin genel olarak anlaşılması için değil, aynı zamanda bant yapısının verilerinin belirli problemlere amaçlı olarak uygulanması için de gereklidir. Uygulama imkanına sahip olan; Gunn diyotları, tünel diyotları, piezo dirençler ve dar aralıklı yarıiletken kızılötesi dedektörler, bant yapıları özellikleri bakımından doğrudan uygulama bulduğu örneklerdir. Ayrıca son yıllarda düzensiz sistemlerin, özellikle de ağır katkılı ve amorf yarıiletkenlerin araştırılmasına ciddi önem verilmiştir. Bu araştırmalar çoğunlukla kesin olarak sıralanmış sistemler teorisi olan bant teorisinden geliştirilen fikirlere dayanmaktadır.

Elektronlar ve holler gibi yük taşıyıcıları hakkındaki kavramlara dayanan katıların elektron teorisi, bir kristalin periyodik alanındaki hareketlerinin serbest bir paracığınkinden oldukça farklı olduğunu göstermektedir.

Modern kavramlara göre parçacıklar, fiziksel bir sistemin uyarılmış enerji durumlarıyla ilişkili temel uyarılmalar veya enerji ve momentum kuantumlanmaları olarak kabul edilebilir. Temel bir uyarımın momentumu sıfıra eşit ise enerjisi minimumdur. Hiçbir parçacığın bulunmadığı minimum enerjiye karşılık gelen fiziksel bir sistemin durumuna temel durum denir. İdeal bir gazda parçacıklar aynı anda hem maddenin yapı taşları hem de gazın tüm dinamik özelliklerini taşır.

Yoğunlaştırılmış katı bir sistemde, durum tamamen farklıdır. Temel duruma yakın düşük uyarılmış durumlarda sistemin toplam enerjisi temel durum enerjisi ve bireysel temel uyarılma enerjilerinin toplamından oluşur. Katılarda, temel uyarılmaların ortalama enerjisi, maddenin yapı taşlarını oluşturan parçacıklar arasındaki etkileşimin oluşturduğu enerjiden daha düşüktür. Bu nedenle parçacıklar aynı anda sistemin dinamik özelliklerinin temel yapıtaşları olamaz. Katılarda etkileşim halindeki parçacıkların oluşturduğu bir sistemde, temel uyarılar dinamik özelliklerinin yapıtaşları olarak görev yapar. Bu temel uyarılmalar, her bir parçacığın (maddenin yapı taşları) hareketi tarafından değil, birbirine bağlı parçacıkların birlikte hareketlerinin bir sonucu olarak ortaya çıkar. Temel uyarılmalar birçok yönden sıradan parçacıklara benzer, bu sebeple kuazi parçacıklar olarak adlandırılırlar. Katıların temel durumunda kuazi parçacık yoktur. Kuazi parçacık, bir tür uyarılmanın (örneğin ısıtma, ışık veya temel parçacıklar tarafından ışınlanma vb.) bir sonucu olarak ortaya çıkar. Yani katının daha yüksek bir enerji seviyesine yükseltilmesiyle kuazi parçacık ortaya çıkar. Katıyı oluşturan atomlar veya iyonlar maddenin yapı taşlarıdır. İyonların sıfır noktasındaki ($T = 0K$) titreşimleri ihmal edilirse, temel durumda iyonların denge de olduğu söylenebilir. İyon sistemi uyarılırsa ($T > 0K$), iyonların titreşime başladığı görülür. Uyarılma yeterli değilse, yani sıcaklık yeterince düşükse, güçlü bir şekilde etkileşime giren iyonların toplam titreşimleri, fononlar olarak dikkate alınabilir. Dinamik özellikleri bakımından katının yapı taşları olan iyonlar, Kuazi parçacık olan fononlardan farklılık gösterir. Diğer parçacıkların aksine, kuazi parçacıklar boşlukta değil, yalnızca bir tür 'ortamda' var olabilir. Bunun nedeni, enerjinin taşıyıcısı olan parçacık benzeri parçacıkların, buldukları ortamın yapı birimleri olmamalarıdır. Parçacıklar ve kuazi parçacıklar arasındaki bu fark temel farklılığı oluşturur. Diğer tüm önemli özellikler her iki parçacık için de aynıdır.

Parçacıklar gibi kuazi parçacıkların da tüm davranışları, enerji-dalga vektör diyagramı ve uydukları istatistik türüyle belirlenir. Kuazi parçacıklardan oluşan bir sistemin enerjisi ε ile momentumu \mathbf{p} arasındaki ilişki, sistemin dinamik özelliklerini tam olarak açıklar. Tek bir kuazi parçacık için $\varepsilon(\mathbf{p})$ bağılılığı, De Broglie dalgalarının frekansı $\nu = \frac{\varepsilon}{h}$ ile dalga vektörü $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{h}$ arasındaki ilişkiye bağlıdır. Kütle m ve hızı ışığın hızıyla karşılaştırıldığında küçük olan serbest bir parçacık için dağılım ilişkisini,

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (3.1)$$

verir. Bu dağılım ilişkisinin basit biçimi uzayın homojenliğine ve izotropisine bağlıdır. Uzaydaki farklı noktalar ve yönler, kristal kafesin konumlarındaki atomların, sabit konumlarda bulunduğu kristal bir yapıda, eşdeğer değildir. Bu, bir katı içindeki kuazi parçacıklar için dağılım ilişkisinde önemli bir probleme neden olmaktadır.

Kuazi parçacıkların özellikleri, diğer benzer parçacıklarda olduğu gibi istatistiklerle belirlenir. Dolayısı ile eğer bir kuazi parçacık yarı integral dönüşe sahipse ve Fermi-Dirac istatistiklerine uyuyorsa, o zaman Pauli dışarlama ilkesine göre, bir durumda birden fazla kuazi parçacık bulunamaz. Bu tür kuazi parçacıklara fermiyonlar denir. Fermiyonlar yalnızca parçacık ve antiparçacık çiftleri halinde oluşturulabilir veya yok edilebilir. Bir kristaldeki elektron (aynı zamanda serbest bir elektron olarak) bir fermiyondur, antiparçacığı ise bir holdür (serbest bir elektron için pozitron antipartiküldür).

Bir kuazi parçacığın tam bir dönüşü var ve Bose-Einstein istatistiklerine uyuyorsa, bir durumu işgal eden parçacıkların sayısı sınırlı değildir. Bu tür kuazi parçacıklara bozon adı verilir. Bozonlar tek tek meydana gelip yok edilebilir. Fononlar, kristaldeki bozonların bir örneğidir.

Kuazi parçacıkların mümkün olan birlikte hareket biçimlerine bağlı olarak ortaya çıkan, farklı türde parçacık benzeri parçacıklar vardır. Herhangi bir ortamda kuazi parçacık türlerinin sayısı, ortamın türüne ve temel durumun özelliklerine bağlıdır. Birkaç tür etkileşimin gerçekleşmesi durumunda birden fazla türde kuazi parçacık oluşabilir. Bir katıda bu tür parçacıklar; fonon, eksiton, magnon, plazmon, polaron, elektron ve hol şeklinde kendini gösterebilir.

Bloch (1928) ve Peierls (1930) tarafından geliştirilen katılar teorisinde, bir elektronun kristal kafesle etkileşimi kristalin simetrisine bağlı olarak, kristalin sahip olduğu periyodik potansiyele ve etkili bir elektrik alan ile ifade edilir. Elektronun enerji spektrumu, yasak enerji bölgeleriyle ayrılmış bir dizi bant biçimindedir. Bu enerji bantlarının üst üste gelmeleri durumunda kendilerine ait dağılım ilişkisini korurlar. ‘Bant yapısı’ ve ‘bant teorisi’ terimleri, enerji seviyeleri bantlar halinde gruplandırılmış elektronların enerji spektrumlarının kendine özgü doğasını yansıtır.

Katıların bant teorisi, periyodik yapılarını veya kristallerin elektronik özelliklerini incelemek için önemli bir modeldir. Bloch-Peierls modelinde bir kristal içerisinde elektronların herhangi bir atoma bağlı olmadığı ve kristal içerisinde serbestçe hareket edebildiği tek bir molekül olarak ele alır. Bir elektron kristalin herhangi bir eşdeğer noktasında eşit olasılıkla görülebilir. Moleküller için Heitler-London yaklaşımından kaynaklanan alternatif modelde her bir elektronun belirli bir çekirdeğe bağlı olduğu kabul edilir. Bölgesel olarak incelendiğinde çok derin enerji seviyelerindeki elektronlar göz önüne

alındığında böyle bir yaklaşımın uygulanması mümkün olmaktadır. Heitler-London modeli, atomlar arası mesafelerin büyük olduğu veya belirli bir atoma bağlı bir elektronun, yalnızca onu aşağıdaki enerjilere götüren ön uyarılmanın bir sonucu olarak komşu atoma sıçrayabildiği, iletkenliğin sıçrama mekanizması göz önüne alındığında da uygulanabilir. Atomlar arasındaki potansiyel, bariyerden daha yüksektir. Moleküller söz konusu olduğunda moleküler yörünge modeline benzeyen Bloch-Peierls modelinin, özellikle yüksek enerji bantlarındaki elektronların davranışını, iletkenlik bandı valansa bağlı olan katıların özelliklerini tanımlamak için daha yararlı olduğu kanıtlanmıştır.

Aşağıdaki ana varsayımlar, katıların elektron enerji spektrumunun bant resmine yol açan bant teorisinin temelini oluşturur:

1. Bir katı ideal periyodik kristal olarak kabul edilir.
2. Bir kristal kafesin konumlarının denge konumları sabittir, yani atom çekirdeğinin hareketsiz olduğu kabul edilir (adyabatik yaklaşım). Fononlar olarak tanımlanabilecek denge konumları etrafındaki atomların küçük titreşimleri, daha sonra elektron enerji spektrumunda bozulmalar olarak ortaya çıkar.
3. Çok elektronlu problem, ortalama bir periyodik alan aracılığıyla sistemin tek bir elektronunun üzerindeki etkisinin tanımlanmasıyla tek elektronlu probleme indirgenir.

Bant teorisi, temel durumdaki enerji bantlarının dolma derecesine göre tüm kristallerin, metallar, yalıtkanlar ve yarıiletkenler olarak sınıflandırılmasına neden olmuştur. Bir madde, yalnızca kısmen elektronlarla dolu bir enerji bandına sahip ise temel durumunda ($T = 0K$ 'da) metaliktir, yani bir elektrik iletkenidir. Çünkü elektronlar yalnızca en yakın yüksek enerji seviyelerinin boş olması koşuluyla hızlandırılabilir. Bu tür bantların yokluğu yarıiletken, yani temel durumda elektriği iletmeyen malzeme için kriter oluşturur. Yarıiletkenler, yalnızca elektronların tamamen dolu olduğu valans bandından, boş bir iletkenlik bandına uyarılması (ısı, ışık vb. ile) üzerine iletken hale gelebilir. Bu içsel iletimdir. İletkenlik, yarıiletkenlerde, yasak bant aralıklarında bulunan safsızlık seviyelerindeki yük taşıyıcılarının katkı malzemenin bantlarının uyarılmasıyla uyarılma meydana gelebilir. Bu da dışsal iletimdir. Safsızlık seviyeleri, farklı atomlar, holler ve kristal yapının katı yapısındaki diğer kusurlar tarafından belirlenebilir.

Bandın bir kısmı (her durumda yarısından azı) doluyorsa, elektronlar, yani negatif yüklü parçacıklar, yük taşıyıcılarıdır. Bandın neredeyse tamamen dolu olması durumunda ise tüm elektron kümesinin hareketi, az sayıda holün (banttaki serbest durumların sayısına eşit) yani pozitif yüklü kuazi partiküllerin hareketi olarak ele alınabilir.

Elektron ve hollerin iki atom arasındaki potansiyeldeki hareketlerinin dışında daha uzun mesafelerde bulunan periyodik potansiyeller hareketinin, boşluktaki hareketlerinden çok farklı olabileceği Katıların bant teorisinin sonuçlarından biridir. Kristal yapılarda, elektronlar ve holler için dağılım ilişkileri, serbest bir elektron için $\varepsilon = \frac{p^2}{2\mu_0}$ ilişkisinden oldukça farklı olabilir. Bir elektronun veya bir holün kütlesini belirlemek için kristal yapıdaki kuvvetlere tepki verirken elektronun veya holün sahip olduğu kütle dikkate alınmalıdır.

Son zamanlarda bant teorisi önemli bir başarı elde etmiştir. Birçok yarıiletken ve metalin bant yapısı, ortogonalleştirilmiş düzlem eğrileri, psödopotansiyel, Green fonksiyonları, artırılmış düzlem dalgalar ve **k.p** yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Özellikle optik, manyeto-optik, rezonans ve diğerleri gibi farklı deneysel yöntemler, yalnızca Brillouin bölgesindeki yüksek simetri noktalarında değil aynı zamanda ara bölgeler için de bir dizi yarıiletken için bant yapısı parametrelerinin ve enerji bantlarının şeklinin belirlenmesine yol açtı. Yarıiletkenler üzerine yapılan çalışmalar bir bütün olarak katı hal fiziğinde teorik araştırmaların yanı sıra deneysel araştırmaların da gelişimine büyük fırsat sağlamıştır. Yarıiletken fiziğinin malzeme bilimine önemli katkı sağlamaktadır. Elektron ve fonon enerji spektrumlarının ayrıntılı analizine dayanan, germanyum ve silisyum temel özellikleri bakımından diğer katılardan daha çok bilgiye sahip olduğumuzu söyleyebiliriz.

Bloch'un bant modelinin dikkat çeken başarısına rağmen, elektronlar arasındaki etkileşim kuvvetlerinin güçlü ve uzun menzilli olduğu durumlarda tek elektron yaklaşımının nasıl uygulanabileceği merak edilebilir. Ancak Gell-Mann ve Brueckner (1957), bir kristaldeki elektron topluluğu gibi çok parçacıklı bir sistemin, tek parçacık uyarımının yanı sıra kolektif titreşim türündeki uyarımları da üretebildiğini göstermişlerdir. Tek parçacık uyarımlarının enerjileri kolektif hareketin en düşük enerjilerinden oldukça düşük olduğundan, eğer uyarılmış parçacıklar arasındaki etkileşimlerle ilgilenilmiyorsa, tek parçacık uyarımlarını, her birinin kendi dağılım ilişkisi $\varepsilon(\mathbf{k})$ olan enerji bantları ile tanımlanabilir. Tüm çok elektronlu etkilerin analizinde, deneysel olarak elde edilen dağılım ilişkisi, $\varepsilon(\mathbf{k})$ 'de ve maddenin dielektrik, manyetik geçirgenliğinde yer almaktadır. Ancak katıların çoklu elektron teorisi geliştirildikten sonra, bunun tek elektron yaklaşımına uygulanabilirliğinin ne kadar mümkün olduğunu belirlemek ve etkilerinin nasıl bir katkısının olacağını belirlemek mümkün olacaktır. Şimdiye kadar, birçok deneysel sonuç, tek elektron yaklaşımının sadece yarıiletkenlerdeki elektron enerji spektrumunun niteliksel değil birçok durumda niceliksel olarak da uygulanabilir olduğunu göstermiştir.

Uzaysal olarak homojen olan nükleer yükün sabit bir yoğunlukla yayıldığı varsayılan sistemlerde, elektron sisteminin temel durum enerjilerinde; ortalama kinetik enerji (veya Fermi enerjisi), değişim enerjisi ve korelasyon korunur.

Pauli ilkesine göre faz uzayının tek bir hücresinde aynı spine sahip iki elektron bulunamaz. Bu, aralarındaki itici güç olarak değerlendirilebilir. Sonuç olarak, Fermi enerjisi mutlak sıfırda bile sıfır değildir. Bu mutlak sıfırdaki enerji, yüksek yoğunluklu elektron gazının enerjisinin ana kaynağını oluşturur. Ayrıca Pauli ilkesi, elektronların paralel spinlerle karşılıklı yerleşmesinde önemli bir ilişkiye neden olur. Bunun sonucunda enerjisi, gaz yoğunluğunun güçlerinde bir sonraki sıradaki elektron gazının enerjisine düzeltme sağlayan bir değişim etkileşimidir. Bunun dışında zıt spinli elektronlar arasında da bir ilişki vardır. Karşılık gelen korelasyon enerjisi, değişim enerjisinin aksine, olağan pertürbasyon teorisi ile bulunamaz. Bunun nedeni, uzun menzilli Coulomb etkileşimlerinin dikkate alınmamasıdır. Dolayısıyla normal pertürbasyon teorisindeki ikinci ve daha yüksek dereceli yaklaşımlarında korelasyon enerjisi ifadelerinde bir farklılık ortaya çıkmaktadır. Korelasyon enerjisini hesaplamak için, yani elektron gazı enerjisine ikinci ve daha yüksek dereceli yaklaşımların düzeltilmesi için, pertürbasyon teorisinin yeni bir formunun kullanılması gerekir. Korelasyon enerjisi, uyarılmamış durumdaki elektron gazının enerjisinden Fermi enerjisinin ve değişim enerjisinin çıkarıldığı,

$$\mathcal{E}_C = \mathcal{E} - \mathcal{E}_F - \mathcal{E}_{\text{etkileşme}} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanabilir.

Kristaldeki elektronların herbiri için uygulanmış dalga fonksiyonu yaklaşımının kullanılmasının elektronlar arası etkileşimin değişim ve korelasyon kısımlarına ayrılmasının bir sonucu olduğu ifade edilmelidir. Bant yapıları hesaplanırken, genellikle değişim etkileşimi tek elektron yaklaşımı çerçevesinde yaklaşık bir şekilde dikkate alınır. Korelasyon etkileri hiç dikkate alınmaz. Bunun sonucu olarak teorideki bu tür yaklaşım, teorik hesaplama sonuçları ile deneysel sonuçların uyumlu hale getirilmesi, teorisinin bazı parametrelerinin ayarlanması ile sağlanmaktadır. Bu deneysel sonuçların anlaşılması için gereklidir. Çünkü iletim elektronları arasındaki etkileşimin tam olarak ifade edilmesi problemi, bu yönde yapılan tüm çabalara rağmen yeterince çözülememiştir. Ancak son yıllarda teoride uygulanmaya başlanan Hubbard Hamiltonyen'in kullanılması ile çoklu elektron etkileşimlerinin hesaplamalarında önemli ilerlemeler kaydedildi. Bu sayede gözlemlenen birçok olayda korelasyon etkilerinin rolü niteliksel olarak anlaşılmıştır (Willardson ve Beer, 1977). Ancak genel olarak elektron-elektron etkileşimlerinin tam olarak ifade edilememesi sorusu hala devam etmektedir.

Bu soruna kesin bir çözüm bulunamaması ve kristal kafesteki iyon potansiyelinin tam şeklinin bilinmemesinden kaynaklanan zorluklar, elektron enerji spektrumunun hesaplanmasında, yarı fenomenolojik yaklaşımın ortaya çıkmasına neden olmuştur. Yarı fenomenolojik yaklaşım, süperiletken olmayan

durumdaki yük taşıyıcılarının Fermi-Dirac istatistiklerine uyduğunu gösteren iyi bilinen deneysel gözlemlerden türetilen bir varsayıma dayanmaktadır. Bu varsayıma göre hem birbirleriyle hem de kristal kafesin periyodik alanıyla etkileşime giren değerlik elektronlarının toplamı, serbest elektronlara göre daha karmaşık bir dağılım ilişkisi izleyen Fermi kuazi parçacıklarının ideal bir gazı olarak ele alınabilir. Bireysel bir kuazi parçacığın enerjisi ε , kristalin simetrisine uygun olarak, karşılıklı kafesin periyodikliği ile dalga vektörü \mathbf{k} 'nın periyodik bir fonksiyonu olmalıdır. $\varepsilon(\mathbf{k})$ fonksiyonunun çoklu değerleri farklı enerji bantlarına karşılık gelir.

Metallere göre yarıiletkenlerde, yük taşıyıcılarının enerji bantlarının kenarlarına yakın durumları işgal ettiği dağılım ilişkisi kural olarak daha basittir. Birçok durumda dağılım ilişkisi ikinci dereceden bir form alır. Kafesin periyodik potansiyelinin dikkate alınması ile serbest elektron kütesinin bazı açılardan normal kütle yerine belirli bir parametre olarak kullanılan etkin kütle ile değiştirilmesine sebebiyet verir. Hatta etkin kütle, ikinci dereceden olmayan bir dağılım ilişkisi durumunda olsa bile yük taşıyıcıların karakteristik bir özelliği olarak tanımlanabilir. Ancak bu durumda kristal momentumunun bir fonksiyonudur. Fakat momentum ifadesi $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ benzeri değildir. Bu, onun farklı şekillerde dahil edilmesi ihtimalini doğuracaktır.

Genel olarak, yarıiletkendeki yük taşıyıcılarının etkin kütesi, kafes sabiti, etkin iyon yükü, yasak enerji aralığı ve diğer parametrelerle birlikte yarıiletkenin en önemli özelliklerinden biri olduğu kabul edilir. Son yıllarda yarıiletken fiziğinde yük taşıyıcılarının etkin kütesi kavramının önemi, yeni ölçüm yöntemlerinin (siklotron rezonansı, manyeto-optik yöntemler vb.) ortaya çıkması ile etkin kütlelerin doğrudan ve hassas ölçülmesi, önemli ölçüde artmıştır. İncelenen yarıiletkenlerin birçoğunda, elektronlar ve holler için dağılım ilişkileri karmaşık olduğundan, yük taşıyıcılarının kütleleri serbest elektron kütesi gibi tek bir skaler kütle ile karakterize edilemez. Yük taşıyıcılarının hareketleri bir tensör veya etkin kütlelerin bir dizi tensörü tarafından tanımlanır. Ayrıca bazı durumlarda yük taşıyıcılarının davranışının, sabit bileşenlere sahip bir veya daha fazla etkin kütle tensörüyle yeterli bir şekilde tanımlanamadığı da iyi bilinmektedir. Bu sebep ile germanyumdaki değerlik bandının dejenerasyonunun bir sonucu olarak, değerlik bandı kenarına yakın hollerin enerjisi, kristal momentum modülüne ikinci dereceden bir bağımlılığa sahiptir. Ancak kristal momentum uzayındaki yönler ise karmaşık bir bağımlılığa sahiptir. Sonuç olarak, etkin kütle tensörünün bileşenleri, yarı momentum fonksiyonu, hatta momentum benzeri bazı yönler için negatif bile olabilir. Son yıllarda, elektronların dağılım ilişkisinin III-V ve II-VI tipi bazı yarıiletkenler için önemli ölçüde ikinci dereceden olmadığı görülmüştür. Başka bir deyiş ile iletim bandının parabolik olmadığı bununla beraber kristal

momentum uzayındaki eş enerji yüzeylerinin ise küresel olduğu bulunmuştur. Bu durumda elektronların etkin kütleleri, enerjinin bir fonksiyonudur.

Yük taşıyıcılarının davranışını karakterize etmek için yük taşıyıcılarının dağılım ilişkisi $\varepsilon(\mathbf{k})$ 'nin, elektrik ve manyetik alanlardaki kristal momentumunun zamanla değişiminin bilinmesi gerekir. Etkin kütlenin tanıtılması çokta gerekli değildir. Serbest elektron kütlesi μ_0 kullanılarak ve belirli bir etkin kristal alanı tanımlanarak bir teori geliştirilebilir. Etkin kütle genel olarak elektronun kristal momentumuna bağlı olduğu için kristal momentumunu kristal alan yerine kütleyle dahil etmenin ve hareketi tanımlamak için etkin kütleli ve dış alanları kullanmanın uygulamada daha pratik olduğu bulundu.

Elektron enerji spektrumunun ve bant yapısının, bant teorisinin temelini oluşturan üç ana yaklaşımdan (kristalin ideal periyodikliği, adyabatik ve tek elektron yaklaşımları) daha genel bir varsayım ile elde edilebileceği daha önce belirtilmişti. Bant teorisinin uygulanabilirliğini önemli ölçüde kısıtlayan yalnızca adyabatik yaklaşımdır. Farklı türden kusurlar (safsızlık atomları, kafes termal titreşimleri, boşluklar vb.) nedeni ile kristal yapının periyodikliğinden meydana gelen sapmalar, elektron enerji spektrumunun bant karakterinde bir sapmaya neden olmaz. Kusurlar, yasak bant aralığındaki var olan enerji seviyelerinin veya dar safsızlık bantlarının ortaya çıkması ile sonuçlanabilir. Eğer kusurların etkisi çok büyük ise bu kusurlar kristalin temel bantların şeklinin değişmesine dahi neden olabilirler. Ancak enerji spektrumunun bant yapısı kalır.

Elektronların tünellemesi veya komşu atomların alanının neden olduğu Stark etkisi sonucu atomik seviyelerde enerji bantları oluşturma olasılığı, bant yapısının ortaya çıkması için atomların değişmeyen periyodikliğinin yani uzun mesafelere giden sabit bir yapının gerekli olmadığını düşündürmektedir. Bunun için, yalnızca kristallerde değil, aynı zamanda amorf katılarda ve sıvılarda da (eriyiklerde) bulunan komşu atomların kısa mesafeli yapısına sahip olmak yeterli olacaktır.

3.2. Kuantum Nokta

Kuantum noktaları, gerçekten sıfır boyutlu elektronik özelliklere sahip bir yarıiletken matristeki tutarlı kapanımlar bize yarıiletken fiziğinin, en büyük zorluklarını ve doruk noktalarını sunar. Kuantum nokta özellikleri bakımından elektromanyetik bir kafesteki atomlara benzemektedir. Bu da büyüleyici yeni cihazların üretilmesini mümkün hale getirmektedir. 1990'ların başında, kuantum noktaların üretimi için gerilmiş heteroyapıların yüzeyinde kendi kendini organize etme olgusunun yönlendirdiği, değiştirilmiş bir Stranski-Krastanow büyüme mekanizması uygulandı. Bu süreç ile büyük yoğunluktaki

kuantum noktalarının, kolay ve hızlı bir şekilde üretilmesi için sağlam bir imkân sağlanmış oldu. Dünya çapında önde gelen laboratuvarlar, hızla artan sayıda olası malzeme kombinasyonlarının, büyütülmesine, fiziksel özelliklerinin bulunmasına, cihazlar üzerinde uygulamalarının araştırılmasına ve yeni modellemeler üzerine çalışmaya başladılar.

1920'lerin sonlarında atom araştırmalarının hâkim olduğu fizik dünyasında Bloch, ideal bir kristalin katı için elektronik 'bant yapısı' kavramını ortaya atarak (Bloch, 1928), sadece fizik dünyasına değil diğer birçok alanda bir devrim sundu. Atomlarda bağlı elektronların enerjileri ayrık olup, Heisenberg'in belirsizlik ilkesinin belirlediği sınırlar dahilinde bu ilişki kesin olarak tanımlanır. Katılarda elektron enerjisi, enerji bantları, sürekli durum yoğunlukları ve holler ile sonuçlanan momentumun çok değerli bir fonksiyonudur. Bloch'un teorisinin merkezinde, uzayın üç boyutunun tamamındaki düzenli kafes noktaları dizisinin sonsuz bir uzantısı vardır. Teorinin sonsuz cisimlerle sınırlandırılması (Şekil 3.1), yüzeylerin yakını dışında herhangi bir pratik bakış açısından anlamsız olduğu kabul edildi. Birkaç mikrometre büyüklüğündeki küçük kristalitler, komşu mesafelere kıyasla çok büyüktür. Küçük nesnelere için bile sonsuz genişliğe sahip bir kristale ilişkin tahminlerde, gözlemlenebilir bir sapma beklenmiyordu.

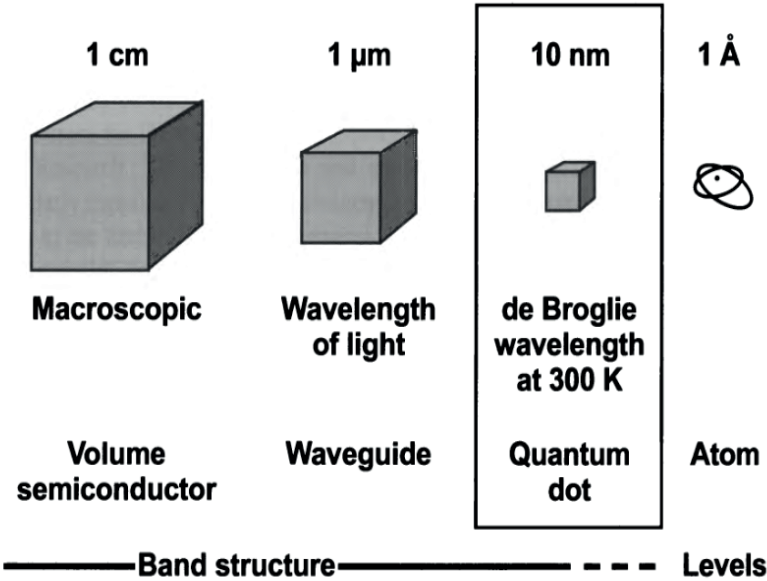
Bir katıdaki taşıyıcı hareketi, taşıyıcı de Broglie dalga boyu (veya bu sayı daha küçükse ortalama serbest geçiş) mertebesinde bir kalınlıkta bir katmanla sınırlıysa, boyut kuantizasyonunun etkileri gözlemlenecektir. De Broglie dalga boyu λ , taşıyıcının etkin kütlelerine μ_{eff} ve T sıcaklığına,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3\mu_{eff}kT}} \quad (3.3)$$

bağlıdır. Bu denkleme giren μ_{eff} yüklü taşıyıcıların kütleleridir. Serbest elektron kütlesi değil, kristaldeki elektronun (veya holün) etkin kütleleridir. Bu kütle, serbest elektron kütlelerinden çok daha küçük olabildiği için, boyut kuantizasyon etkileri, kafes sabitinin on ila yüz katı kadar daha büyük bir kalınlıkta ifade edilebilmektedir.

1950'lerin sonlarında ve 1960'ların başlarında popüler olan boyut kuantizasyon etkilerine yönelik çalışmalar için ultra ince katmanların kullanılması fikri ortaya çıktı. Şu anda araştırmaların ana amacı, vakumla biriktirme yoluyla elde edilen mika substratlar üzerindeki yarı metallerin (örneğin Bi) ince filmleri idi. Ancak metallerin ve yarıiletkenlerin ince filmleri de incelenmiştir. Bu sayede Lu vd. (1996) ve InSb film kalınlığının azalmasıyla etkin bant aralığının artması arasındaki etki gösterilmiştir. Keldysh (1962)'de

kafes sabitinden çok daha büyük bir periyoda sahip olan, üst üste bindirilmiş periyodik potansiyele sahip bir kristaldeki elektronların hareketini teorik olarak araştırdı. Bu çalışma ile minizonların ve negatif diferansiyel direncin ortaya çıkışı tahmin edilmiştir. Potansiyeli modüle etmek için yoğun ses dalgalarının kullanılması önerildi. Davis ve Hosack (1963)'de, elektronların rezonans tünellemesinin etkisini gözlemlmek için ultra ince bir ara metal katmana ve dielektrik bariyerlere sahip beş katmanlı 'metal-dielektrik-metal-dielektrik-metal' çift bariyerli yapıların kullanılmasını önerdiler. Elektronların rezonans tünelleme etkisi, Fermi enerjisi, harici bir elektrik alanının değişmesi sonucu ultra ince metal katmandaki boyut kuantumlanma seviyesini geçtiğinde ortaya çıkar.



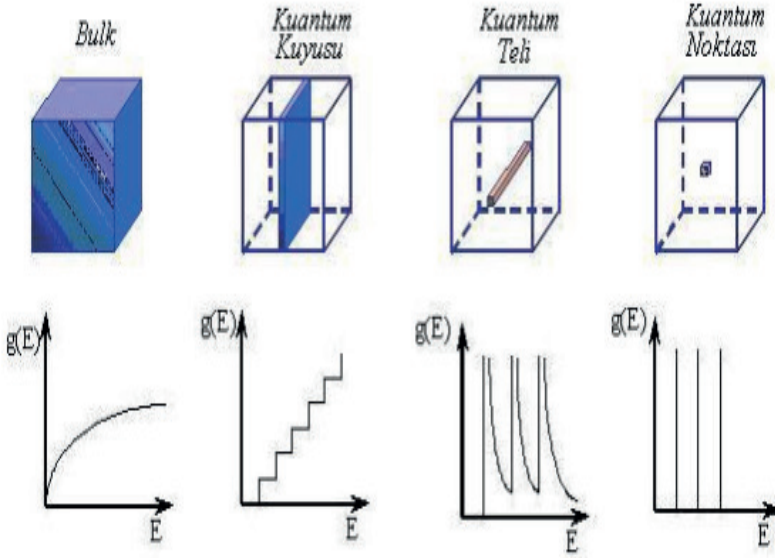
Şekil 3.1. Farklı boyuttaki bant yapılar (Bimberg vd., 1999).

Çoğunlukla teorik olan bu çalışma geniş çapta kabul görse de deneysel çalışmalar o dönemde ki teknolojinin yetersizliği nedeniyle sınırlı kalmıştır. Mikro ya-da nano boyutta bir katmanda kuantum etkilerini görmek için, yük taşıyıcılarının (elektron, hol gibi) yüzeyden veya arayüzden yansması ve arayüze paralel olacak şekilde serbest geçişe sahip olması gerekir. Sınırların pürüzlü olması veya çevresindeki malzemenin hasar görmesi durumunda boyut kuantumlanma etkilerinin gözlenme ihtimalleri oldukça sınırlı kalacaktır.

1960'ların sonlarında gelişen epitaksiyel biriktirme teknikleri ile moleküler ışın epitaksisi ve bir süre sonra da metal organik kimyasal buhar biriktirme

epitaksisi gibi yeni epitaksiyel biriktirme tekniklerinin ortaya çıkması ile deneysel alanda muazzam gelişmeler oldu. Kısa süre de yük taşıyıcılarının hareketlerini yalnızca iki boyutla sınırlayan, daha büyük bant aralığına sahip bir matris içine daha düşük bant aralığına sahip bir yarıiletkenin birkaç kafes sabiti kalınlığındaki boyutlarda katmanlar oluşturmak mümkün hale geldi. Esaki ve Tsu (1970)'de yaptıkları çalışmalar ile süper kafes eksenli boyunca yük taşıyıcı taşınması için kontrollü mini bölge genişliğine sahip yapay malzemelerin oluşturulması için çok katmanlı periyodik yarıiletken heteroyapıların (süper kafesler) kullanılması, bununla birlikte n-i-p-i (n-p katkılı bölgelerinin arasına, katkısız i bölgesi oluşturulduğunda bu yapıları n-i-p-i yapılar olarak tanımlanabilir) süper örgülerinde ve kuantum kuyularında mini bölge sınırına ulaşan yüksek hızlı elektronlar için delokalize (serbest elektron) durumlarının oluşması mümkün oldu. Cihaz uygulamalarının gelişimindeki bir diğer önemli ilerleme, ilk kez Kazarinov ve Suris (1971) tarafından uygulanan üst örgülerdeki sıralı tünelleme gerçekleştirilmiştir. Yine aynı yıl içerisinde Alferov tarafından üst kafeslerde ilk kez $GaP_{0.3}As_{0.7} / GaAs$ malzeme sisteminin büyütülmesi uygulanmıştır (Alferov vd., 1971). Düzlemsel arayüzlere sahip kafes, uyumlu $GaAs / AlGaAs$ yapılarının moleküler ışın epitaksisi ile gerçekleştirilmesinin ardından ancak boyut niceleme etkilerinin açık şekilde gösterilmesi mümkün olmuştur. Chang vd. (1974)'de, rezonans tünellemenin etkisini gözlemlemeyi başardılar. Böylece mikro ve nano boyutta kuantum mekaniğinin uygulamalarını, yarıiletken heteroyapılarda taşınma olayı kanıtlanmış oldu. Ayrıca bu boyutta tek kutuplu uzun dalga boyuna sahip lazer oluşturma fikri, kuantizasyon alt bantları arasındaki ışınımsal geçişler kullanılarak mümkün olabileceği düşünüldü (Kazarinov ve Suris 1971). Bu fikrin gerçekleşmesi, 'Kademeli' lazerler olarak adlandırılan lazer türleri olarak ancak çeyrek asır sonra mümkün oldu (Faist vd. 1994). Kuantum kuyuları kullanılarak bant aralığı mühendisliğinin gelişmiş uygulamaları Osbourn (1982)'da anlatılmıştır.

Dingle vd. (1974) yaptıkları çalışmalar ile kuantum kuyuları ve süper örgülerin optik çalışmalarından çok önemli sonuçlar ortaya çıkmıştır. Bu çalışmaların sonuçlarından en önemlileri, kuantum kuyularındaki durum yoğunluğunun iki boyutlu özellikleriyle ilgili absorpsiyon spektrumunun adım benzeri karakterlerinin doğrudan gözlemlenmesi oldu (Şekil 3.2). Bu çalışmalardan biri de GaAs katmanının kalınlığındaki bir azalma, adımların daha yüksek foton enerjilerine doğru kaymasına neden olduğunun gösterilmesi olmuştur. Yapılan optik çalışmalar bize eksitonik etkilerin çok önemli olduğunu göstermiştir (Christen vd. 1990; Christen ve Bimberg 1990). Eksitonik etkilerin bazı cihazların geliştirilmeleri için, optik modülatörlerin veya iki durumlu optik elemanların çok önemli olduğu bulunmuştur (Miller 1990).



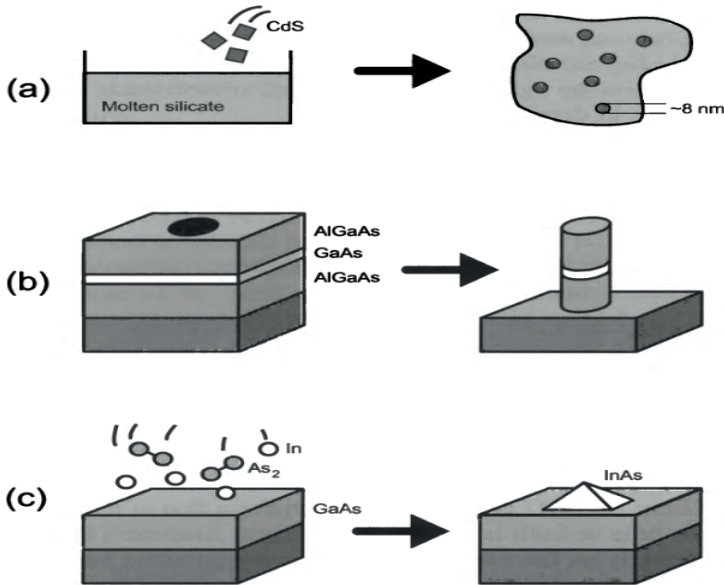
Şekil 3.2. Düşük boyutlu yapılarında boyutunun indirilmesi sonucunda elektronun enerji yoğunluğunu değişimi.

1980'lerin sonuna gelindiğinde kuantum kuyularının ve süper örgülerin birçok özellikleri anlaşılmış ve artık araştırmacıların ilgilerini daha düşük boyutlardaki yapılar (kuantum tellerine ve kuantum noktalara) çekmekteydi (Kapon vd. 1989). Bir kuantum kuyusunun iki boyutta sınırlandırılan 'sonsuz' uzantısının atomik değerlere indirgenmesi, enerjinin sürekli dağılımına ilişkin klasik bant yapısı modelinin, üç boyutta taşıyıcı lokalizasyonuna ve momentumuna sahip bir fonksiyonu olarak, bozulmasına sebep olmaktadır. Sonuç olarak kuantum noktalarının ortaya çıkan enerji seviyelerinin yapısı, atom fiziğinde olduğu gibi ayrıktır (Şekil 3.2). Kuantum noktalarının fiziksel özellikleri, tamamında olmasa da birçok yönden, kafesteki bir atomun durumuna benzer. Kütle ile karşılaştırıldığında tüm makro yapıdaki malzeme özelliklerinde, boyuta bağlı çok önemli bir değişiklik meydana gelir. Niteliksel bir ölçü, Boyut etkileri ve alt seviyelerin enerji ayrımları yeterince büyük olduğunda yine de Broglie dalga boyudur (Denklemler). Bu şekilde geometrik yapı üç boyutta tamamen sınırlandırılmış olmaktadır. Böyle bir kuantum noktanın boyutu 10nm mertebesinde olup, bu boyutta 10^4 'ten daha fazla atom bulunabilir.

Tek bir kuantum noktası veya kuantum noktalarından oluşan toplulukların incelenmesi, temel fizikte yeni bir alan sunmaktadır. Bunun sonucu, kuantum nokta lazerler veya tek elektronlu transistörler gibi yeni cihazların

geliştirilmesinde, kuantum noktalarının birçok yeni uygulaması beklenmektedir. Bu tür cihazlar, doğa korumasından bilgi teknolojilerine kadar toplumun birçok farklı alanında yeniliklere imkân tanıyan heyecan verici yeni özellik ve donanımlara sahip olmaktadır.

Gelişmiş cihazlar için kullanıma uygun kuantum noktalarının geliştirilmesinde önemli zorluklarla karşılaşmıştır. Kuantum noktalarının ticari olarak ilk kullanılabilir hale gelmesi, onlarca yıldır renk filtreleri olarak kullanılan camlardaki nano boyutlu yarıiletken kapanımlar (örneğin CdSe) ile mümkün olmuştur (Şekil 3.3a). Bu tür renkli camların anahtarlar için kullanışlılığı olduğu keşfedilmiştir. Bununla birlikte sınırlama etkisinin, elektronik, optoelektronik cihazlarda kullanılması için pek çok alternatif yaklaşım geliştirilmiş; bunlardan biri, ince katmanlı yapıların üç boyutlu bölgelere yapay olarak modellenmesidir (Şekil 3.3b).



Şekil 3.3. Kuantum noktaların üretme teknikleri (Bimberg vd., 1999).

Son birkaç yılda nanoyapılar üzerine yapılan önemli araştırmalarda heteroyapıların büyümesi sırasında meydana gelen kendi kendini organize etme etkileri kullanılarak istenilen büyüme başarılı bir şekilde gerçekleşmektedir (Şekil 3.3c). Kendi kendini organize etme etkilerini aynı zamanda kendi kendine toplanma veya kendi kendine düzenleme da denir. Hem termodinamik hem de kinetik sıralama mekanizmaları, birçok farklı malzeme sistemi için bir matris içinde benzersiz üç boyutlu ada desenleri oluşturmaktadır. Dengeden

uzak sistemler için kullanılmakta olan ‘Kendi kendini organize etme’ ifadesi, başta biyoloji olmak üzere bilimin diğer alanlarında da kullanılmakta, bunun tersine kuantum nokta oluşumu çoğu durumda bir denge sürecidir.

3.3. Rashba Spin-Yörünge Etkileşimi

Tersine dönme merkezi bulunmayan kristallerde elektronik enerji bantları, spin-yörünge eşleşmesi ile bölünür. Bunu daha özel olarak, Dresselhaus (1955) ve Rashba (1960) tarafından keşfedildiği gibi toplu spin-yörünge eşleşmesi merkez simetrik olmayan çinko-blend veya wurtzit yarıiletkenlerde, elektronun momentumunda farklı bir durum görülmektedir. Modülasyon katkılı yarıiletken heteroyapıların oluşturulmasının ardından Vas’ ko (1979) ile Bychkov ve Rashba (1984), bu düşüncüyü yapısal inversiyon asimetrisine sahip iki boyutlu elektron gazlarına uyguladılar. Uzaysal tersinmeye sahip olmayan çok çeşitli malzemelerde uygulanarak, momentum \mathbf{p} ’deki tek spin-yörünge etkileşiminin doğruluğu kanıtlandı. Spin-yörünge eşleşmesinin en önemli özelliği elektronların, dışarıdan uygulanan herhangi bir manyetik alanın olmadığı ancak bir elektrik alanda hareket ediyorlarsa, elektronlar kendi hareket çerçevelerinde, elektronun spin-yörünge alanını bir manyetik alanla eşleşen manyetik momentiyile uygulanabiliyor olmasıdır. Ters simetriye sahip bir sistemde, momentumdaki tek spin-yörünge alanının kırılması, çok çeşitli sıra dışı sonuçlara olanak tanır. Momentum \mathbf{p} ’de tek spin-yörünge etkileşimi, Rashba spin-yörünge etkileşimi olarak ifade edilir. Rashba etkileşiminin keşfi ile birlikte, spin-yörünge etkileşimi kullanılarak malzeme özellikleri spintronikğin bir dalı olan spin-orbitronikğin araştırma alanının merkezinde yer almaktadır (Şekil 3.4) (Chappert vd. 2007; Fabian vd. 2007).

Momentumu \mathbf{p} olan bir elektron, \mathbf{B} manyetik alanında hareket ettiğinde, hareketine dik yönde,

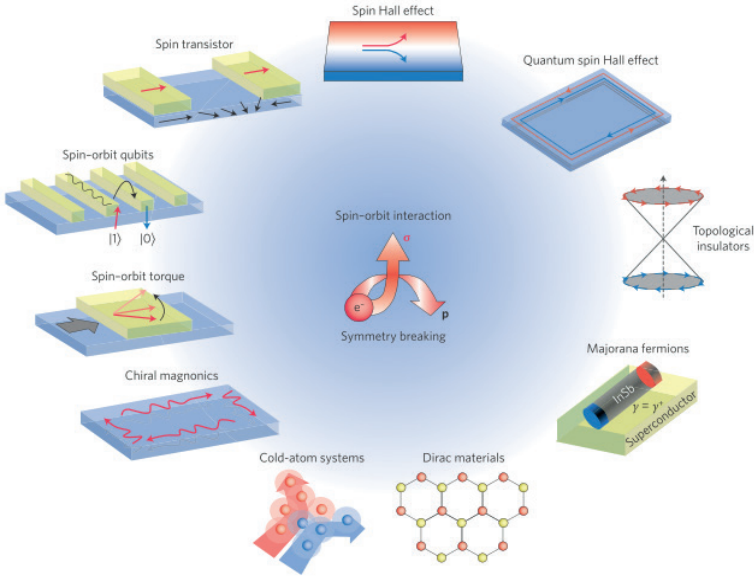
$$\mathbf{F} = -e\mathbf{p} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (3.4)$$

Lorentz kuvvetine maruz kalır ve

$$H_z = \mu_B \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (3.5)$$

Zeeman enerjisine sahip olur. Burada, $\boldsymbol{\sigma}$ Pauli spin vektör matrisi; μ_0 ve e elektronun kütlesi ve yükü; μ_B Bohr magnetonudur. Benzer şekilde, elektron bir \mathbf{E} elektrik alanında hareket ettiğinde, kendi koordinatlar sisteminde bir manyetik alan,

$$B \sim E \times \frac{p}{\mu_0 c^2} \quad (3.6)$$



Şekil 3.4. Spintroniğin çeşitli gerçekleştirilmeleri (Manchon vd. 2015).

etkisine maruz kalır. Bu manyetik alan aynı zamanda spin-yörünge etkileşimi adı verilen momentuma bağlı,

$$H_{SO} \sim \frac{\mu_B}{\mu_0 c^2} (E \times p) \cdot \sigma \quad (3.7)$$

Zeeman enerjisini de etkiler. Kristallerde elektrik alan,

$$\mathbf{w}(\mathbf{p}) = -\frac{\mu_B}{\mu_0 c^2} (\nabla V \times \mathbf{p}) \quad (3.8)$$

spin-yörünge alanını üreten kristal potansiyeli,

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (3.9)$$

gradyanı ile verilir. Spin-yörünge etkileşimi zaman-tersine simetriyi koruduğu için $(\mathbf{w}(\mathbf{p}) \cdot \sigma = -\mathbf{w}(-\mathbf{p}) \cdot \sigma)$, spin-yörünge alanı elektron momentumu \mathbf{p} 'de tek olmalıdır; yani $\mathbf{w}(-\mathbf{p}) = -\mathbf{w}(\mathbf{p})$. Elektron momentumunun \mathbf{p} 'deki tek

spin-yörünge etkileşimi yalnızca uzaysal ters çevirme simetrisinin bulunmadığı sistemlerde korunur.

Dresselhaus (1955), *GaAs* veya *InSb* gibi bir inversiyon merkezi bulunmayan çinko-blend gibi III-V tipi yarıiletken bileşiklerde, Γ noktasına yakın spin-yörünge etkileşimi,

$$H_{D_3} = \frac{\gamma}{\hbar} \left((p_y^2 - p_z^2) p_x \sigma_x + c.p. \right) \quad (3.10)$$

şeklinde olduğunu ilk olarak fark etmiş. Burada $c.p.$ indekslerin dairesel permütasyonlarını belirtir. Elbette, bant yapısındaki ek simetri hususları, \mathbf{p} 'de tek spin-yörünge etkileşim terimleriyle sonuçlanır (Winkler 2003). Yönü (001) olan yön boyunca gerilimin varlığında, Denklem (3.10)'de verilen kübik Dresselhaus spin-yörünge etkileşimi doğrusal Dresselhaus spin-yörünge etkileşimine,

$$H_{D_1} = \frac{\beta}{\hbar} (p_x \sigma_x - p_y \sigma_y) \quad (3.11)$$

indirgenir (D'yakonov 1986). Burada $\beta = \gamma p_z^2$ olur. Büyüme yönü boyunca kırılan yapısal ters simetriye sahip ve C_{2v} simetrisine uyan kuantum kuyularında Vas' ko (1979) ve Bychkov ve Rashba (1984), arayüzey elektrik alanı $\mathbf{E} = E_z \mathbf{z}$,

$$H_R = \frac{\alpha_R}{\hbar} (z \times p) \cdot \sigma \quad (3.12)$$

şeklinde bir spin-yörünge etkileşimi ile sonuçlandığını öne sürdü. Burada, α_R Rashba parametresidir. Başka bir deyişle, katı halde Dirac aralığı $mc^2 \approx 0.5 MeV$, elektronlar ve holler arasındaki $\sim 1 eV$ enerji aralığı ve

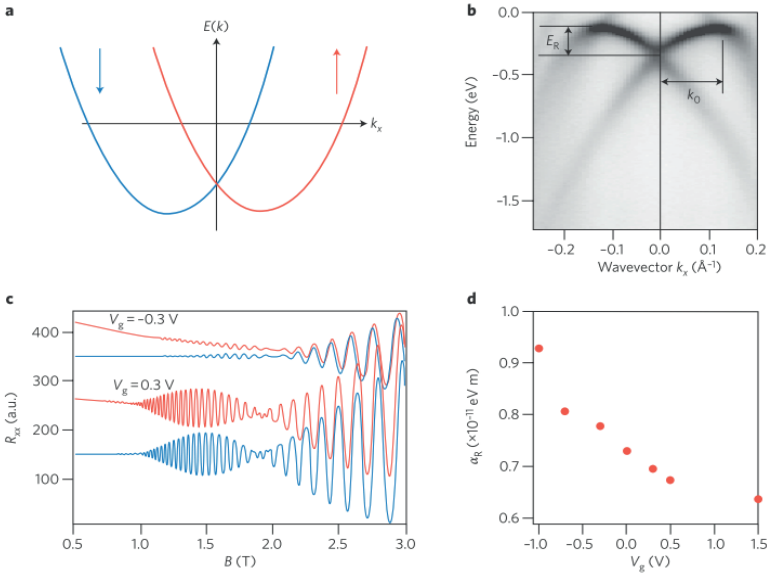
$$\frac{\alpha}{\hbar} \gg \frac{\mu_B E_z}{\mu_0 c}$$

ile değiştirilir.

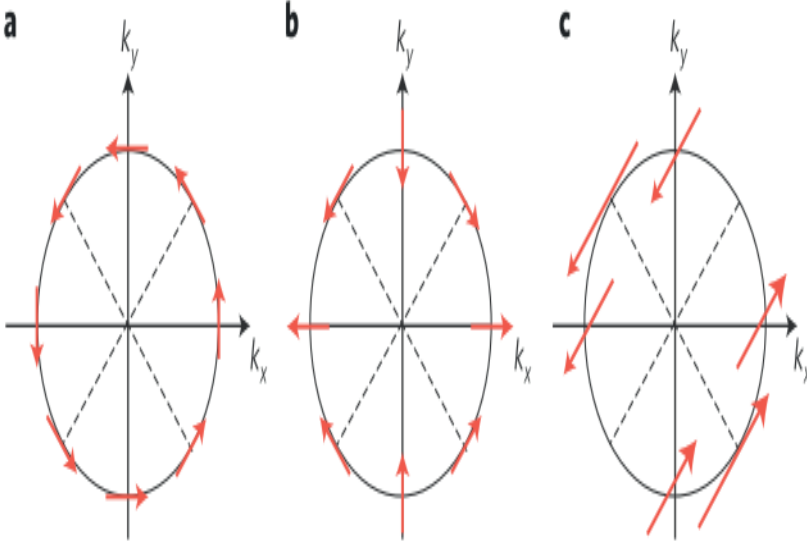
İki boyutlu düzlem dalgalar için türetilen bu uygun form yalnızca fenomenolojiktir ve gerçekçi sistemlere ihtiyatla uygulanmalıdır. Teorik çalışmalar, ters simetri eksikliği, düzlem-dalga yaklaşımının geçerli olmadığı çekirdeğe yakın elektron dalga fonksiyonunu bozduğunu göstermiştir. Ayrıca ters simetri eksikliği ek bir elektrik alanı E_z 'yi oluşturmaktadır (Bihlmayer vd. 2006). Bu nedenle, momentum p -doğrusal Rashba spin-yörünge etkileşiminin, ters-asimetrik sistemlerdeki spin-yörünge etkileşiminin gerçek formunu bütünüyle yansıtmayan fakat kullanılabilir bir yaklaşımdır. Hem

Dresselhaus hem de Rashba spin-yörünge etkileşimi, spini lineer momentuma kilitler ve spin alt bantlarını enerjiye böler (Şekil 3.5a). Bu tür bant bölünmesi belirli metalik yüzeylerde de gözlemlenir (Şekil 3.5b).

Şekil 3.6'da, Rashba (Şekil 3.6a) ve gerinimin neden olduğu (Şekil 3.6b) p -doğrusal Dresselhaus spin-yörünge etkileşimi durumunda Fermi yüzeyindeki spin dokusunu göstermektedir. Şekil 3.6c'de gösterilen örnekte, her ikisi de eşit büyüklükte mevcut olduğunda, spin-yörünge alanı $[110]$ yönü boyunca hizalanır, bu da örneğin bu yöndeki spin gevşeme etkileşiminin baskılanmasıyla sonuçlanır (Averkiev ve Golub 1999).



Şekil 3.5. Rashba spin bölünmesi (Manchon vd. 2015).



Şekil 3.6. Fermi yüzeyindeki döndürme dokusu (Manchon vd. 2015).

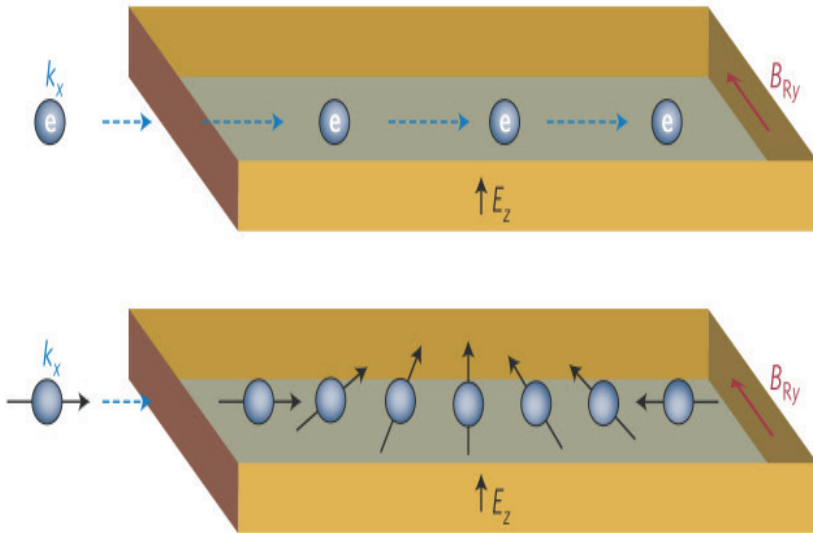
Rashba parametresi α_R 'nin büyüklüğü, toplu ters çevirme simetri kırılması yaşanan geniş bir malzeme yelpazesi veya arayüzey için ifade edilmiştir. *InAlAs* / *InGaAs*'daki (Ho Park vd. 2013; Nitta vd. 1997) (Şekil 3.5c) Shubnikov-de Haas salınımlarının ve spin deviniminin analizi, zayıf lokalizasyon ölçümleri kullanılarak (Nakamura vd. 2012) ($\sim 0.5 \times 10^{-11} eV\text{m}$) *SrTiO_3* (001) tek kristallerinin yüzeyindeki son bulgularla karşılaştırılabilir bir Rashba parametresini verir ($\sim 0.67 \times 10^{-11} eV\text{m}$). Rashba spin-yörünge etkileşimi, ARPES kullanılarak Au (LaShell vd. 1996), Ir (Varykhalov vd. 2012) veya *BiAg* (111) (Ast vd. 2007) alaşımı gibi ağır metallerin yüzeyinde de doğruluğu kanıtlandı. Ayrıca Rashba spin-yörünge etkileşimi, yarıiletkenlerden iki kat daha büyük bir Rashba etkisini ortaya çıkardı (*BiAg* (111) alaşımı için $\sim 3.7 \times 10^{-10} eV\text{m}$). Son zamanlarda, topolojik izolatörlerin karşılaştırılabilir Rashba parametreleri gösterdiği bulunmuştur (*Bi_2S_3* için $\sim 4 \times 10^{-10} eV\text{m}$) (King vd. 2011). Rashba tipi spin-yörünge etkileşiminin varlığı, hacimsel ters çevirme simetri kırılmasına sahip yapıların bant yapısında, gösterilmiştir. Örneğin, polar yarıiletken *BiTeI*, topolojik yalıtkanların yüzeyinde bulunan kadar büyük bir hacimsel Rashba parametresi görüntülenmiştir (Ishizaka vd. 2011).

Ters simetriye sahip olmayan sistemlerde spin-yörünge etkileşiminin neden olduğu fiziksel durumu anlamak için daha önce ifade edilen p -lineer Rashba spin-yörünge etkileşimi dikkate alınırsa Denklem (3.12), elektron momentumu

p ile orantılı bir manyetik alan içeren bir Zeeman terimini tanımlar. Sonuç olarak, elektronlar x eksenini boyunca hareket ettiğinde, Şekil 3.7’de gösterildiği gibi, Rashba alanı adı verilen, y eksenini boyunca B_{Ry} etkili bir manyetik alanla karşılaşır. Rashba alanının büyüklüğü,

$$B_{Ry} = \frac{2\alpha k_F}{g\mu_B} \quad (3.13)$$

şeklinde bulunur. Burada k_F ve g , sırasıyla iletim kanalındaki taşıyıcıların Fermi dalga vektörü ve g faktörüdür.



Şekil 3.7. Ters spin galvanik etkisi ve spin devinimi (Manchon vd. 2015).

Elektron spini Rashba alanıyla aynı yönde olmadığına spin devinimi, alanın büyüklüğüne bağlı bir frekansta, gerçekleşir. Dış manyetik alan etkisinin olmadığı durumda (Şekil 3.7), x eksenini boyunca hareket eden spin-polarize elektronlar Rashba alanının etkisi altında devinim yaparlar. Rashba alanının gücü, elektrik alanının büyüklüğü ve spin devinim hızı (Datta ve Das 1990; Koo vd. 2009; Nitta vd. 1997; Schultz vd. 1996), kapı voltajı ile kontrol edilebilir (Şekil 3.5c). Rashba alanının ortaya çıkmasının ilginç bir sonucu, harekette olan elektronların bu alan yönü boyunca polarize olmasıdır. Bu, ters dönüş galvanik etkisi olarak bilinir (Edelstein 1990). Bu etkinin, spin galvanik

etkisi olarak adlandırılan ve dengede olmayan spin yoğunluğunun (optik ya da elektriksel araçlarla oluşturulan) bir yük akımına dönüştürüldüğü bir karşılığı vardır (Ivchenko ve Pikus 1978).

3.4. Seyreltilmiş Yarımanyetik Yarıiletken Yapılar (DMS)

Seyreltilmiş manyetik yarıiletkenler veya seyreltilmiş yarımanyetik yarıiletkenler, bir dönem en ilgi çekici araştırma konularından biriydi. Bu çalışmalarda özellikle “geleneksel” seyreltilmiş manyetik yarıiletkenler, yani II-VI veya IV-VI yarıiletkenlerin, geçiş metali iyonlarının alaşımlarına uygulanır. 1990’lı yılların başında (Munekata vd. 1989; Ohno vd. 1992), kritik sıcaklıkları $T \sim 170K$ ulaşan III-V DMS’deki (Diluted magnetic semiconductor) ferromanyetik düzenin keşfi, bu malzemelere olan ilgiyi yeniden artırdı. Burada araştırmacıların en önemli beklentisi, Curie sıcaklıklarının açıkça belirlenmiş bir yol ile daha kolay bir şekilde oda sıcaklığı aralığına getirilebileceği ve spintronik metalik versiyonunun ticari olarak büyük başarıları elde etmesinden dolayı ilgi çekmiştir. Spintronik yarıiletken versiyonunun uygulama alanı bulması ve kuantum bilgi işleme cihazlarının geliştirme çabalarına dahil etme umutları nedeniyle araştırmacıları da cezbetmiştir. Bu umut ve beklentiler henüz tam anlamıyla gerçekleşmemiş olsa da çabalar devam ediyor.

Son zamanlardaki başarılarla güzel bir örnek olarak, tek bir manyetik iyon içeren kuantum noktalarına ilişkin yeni sonuçlardan bahsetmek gerekir. Bu tür kuantum noktalarındaki eksitonik durumların incelenmesinde, şu ana kadar *InAs / GaAs* (Krebs vd. 2009) ve *CdTe / ZnTe* (Besombes vd. 2008; Léger vd. 2006) gibi malzeme sistemleri ve manyetik iyon olarak Manganez ile sınırlı olan çalışmalarda büyük bir ilerleme kaydedilmiştir. Ayrıca, II-VI kuantum noktalarında, *Mn* spin durumlarının optik kontrolüne ilişkin ilk sonuçlar deneysel olarak gösterilmiş (Goryca vd. 2009; Le Gall vd. 2009, 2010) ve teorik olarak analiz edilmiştir (Reiter vd. 2009). Bunu, III-V kuantum noktalarında *Mn* spin dinamiği ve kontrolüne ilişkin çalışmalar takip edecektir. Benzer şekilde, nanoteknolojinin diğer nesnelere, yani çoğunlukla buhar-sıvı-katı tekniğiyle büyütülen, örneğin *ZnMnTe*’den oluşan nanoçubukların büyütülmesi ve karakterizasyonuna yönelik önemli bir çaba gösterilmektedir. Şu anda oldukça aktif bir şekilde, DMS nanoçubuklar ve bu nesnelere meydana gelen yapılar üzerine araştırmalar geliştirilmektedir (Zaleszczyk vd., 2008).

1960 yıllarda Seyreltilmiş manyetik yarıiletkenler üzerine ilk araştırmalar, IBM Araştırma Merkezi’nde özellikle Cr ve Eu kalkanları içeren ferromanyetik spinelleri olmuştur. Bununla birlikte ancak bu alan yirminci yüzyılın yetmişli yıllarının ortalarında manyetik bileşenler (çoğu durumda Manganez iyonları) *CdTe* gibi nispeten basit yarıiletken matrislere dahil edilmeye başlandığında, ivme kazanmaya başladı. Manganezi tanıtmaya motivasyonları kesinlikle farklıydı;

(*Hg, Mn*)*Te* 'nin, dar aralıklı yarıiletkenlerden yapılmış kızılötesi dedektörler için malzeme olan (*Hg, Cd*)*Te* 'den mekanik olarak daha dayanıklı olacağı veya elektron rezonanslarının (harici manyetik alan yerine iç etkin alanda) tespit edilebilir hale geleceği umuluyordu. Holm ve Furdyna (1977), manyetik alanda helicon dalgalarının iletimini kullanarak yüksek iletkenliğe sahip *HgTe* 'de *Mn* 'nin spin rezonansını tespit etmeyi umuyordu. Bu fikirlerin hepsi zaman testinden sağ çıkamadı. Ancak şüphesiz bu, çok belirgin manyetooptik aktivitenin keşfiydi. Bu materyallerin, özellikle *CdMnTe* 'deki eksitonik durumların büyük Faraday rotasyonu (kökeni büyük Zeeman bölünmesine kadar takip edilen) daha geniş bir ilgi uyandırdı (Gaj vd. 1993; Komarov vd. 1977). Bu alanda ön görülen teorik çalışma fikirleri, Manyetik polaronlar ve spin molekülleri ile spin bağımlı saçılma ve taşıyıcılar yoluyla dolaylı bağlanma ile ilgili düşüncelerin dikkate alınması gerekir. Bunlar seyreltilmiş manyetik yarıiletkenlerin çalışma alanlarının öncüleri olarak görülebilir.

3.5. Elipsoid Kuantum Noktanın Enerji Spektrumu ve Dalga Fonksiyonu

3.5.1. Elipsoid kuantum noktanın Hamiltonyen'i

İncelenmekte olan tek elektronlu kuantum sistemimizde, elektronun hareketi elipsoid geometrisine sahip potansiyelle sınırlı olduğu varsayılmaktadır. Elipsoid içinde potansiyel sıfır, elipsoidin dışında ise potansiyelin değeri sonsuz olduğu varsayılmaktadır. Bu yaklaşım elektronu elipsoid içine hapseder. Söylediklerimizi matematiksel olarak,

$$U(\rho, z) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \frac{x^2}{R_0^2} + \frac{y^2}{R_0^2} + \frac{z^2}{L_0^2} \leq 1 \\ \infty, \frac{x^2}{R_0^2} + \frac{y^2}{R_0^2} + \frac{z^2}{L_0^2} > 1 \end{array} \right. , R_0 \gg L_0 \quad (3.14)$$

şeklinde yazabiliriz (Galitskiy vd. 1992). Burada, R_0 parametresi XOY düzleminde tanımlı olup, elipsoidin yarıçapını belirler ve $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ olarak tanımlanır. Potansiyel ifadesinde L_0 parametresi yönünde tanımlı olup, elipsoidin kalınlığını belirler. Elipsoidin kalınlığı $\rho = 0$ değerinde yani elipsoidin merkezinde maksimum değere ve $\rho \rightarrow R_0$ yaklaştıkça elipsoidin kalınlığı git gide sifıra yaklaşır.

Denklem (3.14)'deki potansiyel ifademizde $R_0 \gg L_0$ olduğunu varsaymaktayız. Bu koşul bize elipsoid yarıçapının elipsoid yüksekliğinden çok daha büyük olduğunu söyler. Böyle bir sistemde elektronun XOY

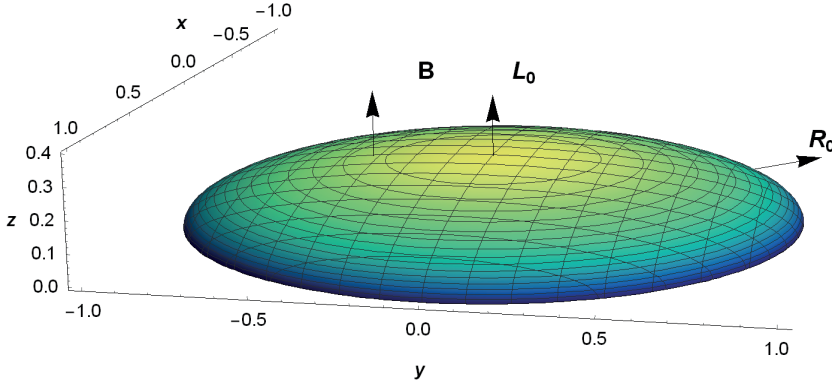
düzlemindeki hareketi OZ yönünde bir adyabatik bozulma olarak kabul edilebilir. Yani, elektronun OZ yönündeki değişimi XOY düzlemindeki değişimine göre çok hızlı değiştiği varsayılmaktadır (Şekil 3.8). Bunu dikkate alarak, incelenmekte olan sitemimizin Hamiltonunu iki alt sisteme ayırabiliriz. Elektronun OZ yönündeki değişimini “hızlı” alt sistemi, XOY düzlemindeki değişimini ise “yavaş” alt sistemi olarak tanımlayalım. Tanımladığımız koşullar altında incelenmekte olan sistemimizin toplam Hamiltonunu,

$$H = H_1(z) + U(\rho, z) + H_2(\rho) \quad (3.15)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, $H_1(z)$ “hızlı” alt sistemin Hamiltonu, $H_2(\rho)$ “yavaş” alt sistemin Hamiltonu ve $U(\rho, z)$ ise sistemin potansiyeli. Yukarıda söylediğimiz adyabatik bozulmayı dikkate alarak elektronun dalga fonksiyonunu,

$$\psi(\rho, \phi, z) = e^{im\phi} R(\rho) \chi_\rho(z) \quad (3.16)$$

şeklinde yazabiliriz (Bogachek vd. 1996; Glazman vd. 1988).



Şekil 3.8. Elipsoid kuantum nokta.

Burada, manyetik kuantum sayısı $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ değerlerini alır, $R(\rho)$ elektronun XOY düzlemindeki durumunu belirler, $\chi_\rho(z)$ ise elektronun OZ yönündeki durumunu belirlemektedir.

Tanımladığımız “hızlı” alt sistemi için Schrödinger denklemi,

$$\left(H_1(z) + U(\rho, z)\right) \chi_\rho(z) = E_z \chi_\rho(z) \quad (3.17)$$

olarak yazılır. Bu denklemin her iki tarafını $\chi_\rho^*(z)$ çarparsak,

$$\chi_\rho^*(z) \left(H_1(z) + U(\rho, z)\right) \chi_\rho(z) = E_z \chi_\rho^*(z) \chi_\rho(z) \quad (3.18)$$

ve

$$\int \chi_\rho^*(z) \chi_\rho(z) dz = 1 \quad (3.19)$$

olduğuna dikkat ederek,

$$\chi_\rho^*(z) \left(H_1(z) + U(\rho, z)\right) \chi_\rho(z) = E_z \quad (3.20)$$

E_z öz değerini buluruz. Bulduğumuz E_z öz değeri elektronun bu alt sistemdeki enerji durumunu belirler. Daha sonra, yukarıda yazdığımız Denklem (3.15) ve Denklem (3.16) dikkate alarak sistemin toplam Hamiltonu için Schrödinger denklemini,

$$\left(H_1(z) + U(\rho, z) + H_2(\rho)\right) R(\rho) \chi_\rho(z) = ER(\rho) \chi_\rho(z) \quad (3.21)$$

yazalım. Bu denklemin her iki tarafını soldan $\chi_\rho^*(z)$ ’ya çarpalım,

$$\chi_\rho^*(z) \left(H_1(z) + U(\rho, z) + H_2(\rho)\right) R(\rho) \chi_\rho(z) = \chi_\rho^*(z) ER(\rho) \chi_\rho(z) \quad (3.22)$$

ve z ’ye göre integralini alalım, z ’den bağımsız terimleri ise integral dışına alarak, aşağıya

$$\begin{aligned} & \chi_\rho^*(z) \left(H_1(z) + U(\rho, z)\right) \chi_\rho(z) R(\rho) + \\ & \chi_\rho^*(z) H_2(\rho) R(\rho) \chi_\rho(z) = ER(\rho) \chi_\rho^*(z) \chi_\rho(z) \end{aligned} \quad (3.23)$$

yazalım. Daha sonra, $H_2 R \chi \approx \chi H_2 R$ kabul ederek ve denklemdeki birinci terimin Denklem (3.20) göre E_z olduğunu dikkate alarak,

$$E_z R(\rho) + H_2(\rho) R(\rho) = ER(\rho) \quad (3.24)$$

veya

$$\left(H_2(\rho) + E_z\right) R(\rho) = ER(\rho). \quad (3.25)$$

denklemini elde ederiz. Denklemden görüldüğü gibi “hızlı” alt sistemin öz değeri “yavaş” alt sistemi için bir etkin potansiyel olarak etki eder. Denklemden E değeri “yavaş” alt sistemin öz değeridir.

İncelenmekte olan sistemimizin toplam Hamiltonunu,

$$H = \frac{1}{2\mu} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + U(\rho, z) + H_R + H_Z + H_{DMS} \quad (3.26)$$

yazalım. Burada, $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ momentum operatörü olup, burada,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad (3.27)$$

silindirik koordinatlarında nabla operatörüdür (Gibbs ve Wilson 1901);

\mathbf{A} vektör potansiyel olup, hesaplamalarımızda bunun $\mathbf{A} = \left(0, \frac{B\rho}{2}, 0\right)$ eşit olduğunu kabul edeceğiz; e elektronun yükü; μ elektronun etkin kütlesi. Hamilton ifadesinde H_R terimi Rashba terimi olup bu genelde çinko sülfür kristal yapıların düğüm noktalarına göre inversiyon asimetrisi sonucu kristalin bant yapısında \mathbf{k} göre spin yarılmasını açıklayan spin-yörünge etkileşime terimidir. Rasha terimi matematiksel olarak,

$$H_R = \frac{\alpha_R}{\hbar} (\boldsymbol{\sigma} \times (\mathbf{p} + e\mathbf{A}))_n \cdot \hat{n} \quad (3.28)$$

şeklinde yazılır (Bychkov ve Rashba 1984). Burada $\boldsymbol{\sigma}$ Puali matrisleri. İfade deki n birim vektörü olup yapının büyüme yönüne paralel olarak alınır. İncelenmekte olan sistemimizin büyüme yönü z yönünde olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla Rashba teriminde vektör çarpımında sadece z yönü sıfırdan farklı olacaktır. Bunu matematiksel olarak,

$$\alpha_R \begin{pmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \sigma_\rho & \sigma_\phi & \sigma_z \\ p_\rho + eA_\rho & p_\phi + eA_\phi & p_z + eA_z \end{pmatrix} \cdot \hat{z} = \alpha_R \sigma_\rho (p_\phi + eA_\phi) - \alpha \sigma_\phi (p_\rho + eA_\rho) \quad (3.29)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, silindirik koordinatlarındaki Pauli matrislerinin,

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi \\ \sigma_\phi &= -\sigma_x \sin \phi + \sigma_y \cos \phi \\ \sigma_z &= \sigma_z \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde olduğunu dikkate alarak ve Denklem (3.29)'u,

$$\begin{aligned} \alpha_R \begin{pmatrix} \hat{\rho} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ \sigma_\rho & \sigma_\phi & \sigma_z \\ p_\rho + eA_\rho & p_\phi + eA_\phi & p_z + eA_z \end{pmatrix} \cdot \hat{z} &= i\alpha_R (-\sigma_x \sin \phi + \sigma_y \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \rho} - \\ \frac{\alpha_R}{\rho} (\sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi) &\left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, $\Phi = \pi\rho^2 B$ manyetik akı ve $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e}$ manyetik akı sabiti. Hamilton ifadesindeki dördüncü terim Zeeman terimi olup, bunun matematiksel ifadesi,

$$H_Z = \frac{1}{2} g \mu_B B_z \sigma_z \quad (3.32)$$

şeklinde yazılabilir (Griffiths 2004). Burada, g Lande faktörü, μ_B Bohr magnetonu, σ_z Pauli matrisinin z yöndeki bileşeni. Hamiltondaki son terim yapının DMS özelliğinden kaynaklanan değiş-tokuş etkileşimi ifade eder ve

$$H_{DMS} = 3A\sigma_z \quad (3.33)$$

şeklinde yazılır (Furdyna 1988). Burada, A parametresi,

$$A = \frac{1}{6} x N_0 \tau \langle S_z \rangle \quad (3.34)$$

iletkenlik bandındaki değiş tokuş etkileşimini ifade eder. Aynı ifade valans bandı içinde yazarsak,

$$B = \frac{1}{6} x N_0 \theta r \langle S_z \rangle \quad (3.35)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \tau &= \langle X | J | X \rangle = \langle Y | J | Y \rangle = \langle Z | J | Z \rangle \\ \theta &= \langle S | J | S \rangle \end{aligned} \quad (3.36)$$

ve

$$r = \frac{\theta}{\tau} \quad (3.37)$$

eşittir. Bu parametre DMS yapılarında uygulanan sabit bir manyetik etkisi altında Mn^{2+} iyonunun $3d^5$ elektronu ile yapının sp -bant elektron arasında meydana gelen $sp-d$ değiş-tokuş etkileşimini tanımlar. Burada, J_{s-d} değiş-tokuş etkileşim katsayısı; τ ve θ integralleri sırasıyla $s-d$ ve $p-d$ bantlar arasındaki değiş tokuş etkileşim integrallerini ifade eder; N_0 hücre başına yoğunluk parametresi olup, genelde $N_0\tau$ değeri $N_0\theta$ değerine göre büyüktür;

$\langle S_z \rangle$ parametresi Mn atomunun spinin z bileşeninin termodinamik ortalaması olup, aşağıdaki gibi yazılır (Furdyna, 1988),

$$\langle S_z \rangle = -SB_S \left(\frac{Sg_{Mn}\mu_B B}{k_B T} \right). \quad (3.38)$$

Burada, $B_{5/2}(\xi)$ Brillouin fonksiyonu (Kittel 2005), $g_{Mn} = 2$ Mn atomunun Lande faktörü, k_B Boltzmann sabiti; T etkin sıcaklık, bu parametre Mn iyonları arasındaki kümelerin ve antiferromanyetik etkileşimin varlığını açıklar; $S = \frac{5}{2}$ eşit olup Mn^{2+} iyonunun toplam spin değerine karşılık gelir (Furdyna 1988). Yukarıda tanımladığımız Hamiltona karşılık gelen dalga fonksiyonunu,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

şeklinde tanımlayacağız. Schrödinger denklemini yazmadan önce Denklem 'deki Hamilton'u terimlerine göre,

$$H = \frac{1}{2\mu} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 I_{2 \times 2} + U(\rho, \phi, z) I_{2 \times 2} + \alpha_R (\hat{\mathbf{o}} \times (\mathbf{p} + e\mathbf{A})) \cdot \hat{n} + \frac{1}{2} g \mu_B B \sigma_z + 3A \sigma_z \quad (3.40)$$

açık yazalım. Burada, $I_{2 \times 2}$ birim matris. Daha sonra bu ifadedeki vektörlerin bileşenlerine göre

$$H = \frac{1}{2\mu} (-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2 + U(\rho, z) + \frac{1}{2} \mu_B B \left(g + \frac{6A}{\mu_B B} \right) \sigma_z \times \left(i\alpha_R (-\sigma_x \sin\phi + \sigma_y \cos\phi) \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\alpha_R}{\rho} (\sigma_x \cos\phi + \sigma_y \sin\phi) \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right) \quad (3.41)$$

yazalım. İfade deki ilk terimin değerini bulmaya çalışalım. Bunun için bu terimi,

$$(-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2 = -\hbar^2 \nabla^2 - i\hbar e \nabla \mathbf{A} - i\hbar e \mathbf{A} \nabla + e^2 A^2 \quad (3.42)$$

şeklinde yazalım. Daha sonra nabla operatörünü karesini silindirik koordinatlarda,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.43)$$

Denklem ' de

$$\begin{aligned} (-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2 = & -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \\ & i\hbar e \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \frac{B\rho}{2} \hat{\phi} - \\ & i\hbar e \frac{B\rho}{2} \hat{\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) + \\ & e^2 \frac{B^2 \rho^2}{4} \end{aligned} \quad (3.44)$$

yerine yazalım. İfade den görüldüğü gibi ikinci ve üçüncü terimde skaler çarpım sonucunda $\hat{\phi}$ bileşen hariç diğer bileşenler sıfır olacaktır ve sonra bu iki terim toplanır. Burada ifade,

$$(-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - i\hbar e B \frac{\partial}{\partial \phi} + e^2 \frac{B^2 \rho^2}{4} \quad (3.45)$$

şeklinde yazılabilir. Daha sonra siklotron frekansı, $\omega_c = \frac{eB}{\mu}$ bağlantısını dikkate alarak bu ifadeyi,

$$(-i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - i\hbar \mu \omega_c \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\mu^2 \omega_c^2 \rho^2}{4} \quad (3.46)$$

şeklinde yazılır. Elde ettiğimiz bu ifadeyi Denklem (3.41)'da,

$$\begin{aligned} H = & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \\ & i \frac{\hbar \omega_c}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} + \frac{1}{2} \mu_B B \left(g + \frac{6A}{\mu_B B} \right) \sigma_z + \\ & i\alpha_R \left(-\sigma_x \sin \phi + \sigma_y \cos \phi \right) \frac{\partial}{\partial \rho} - \\ & \frac{\alpha_R}{\rho} \left(\sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi \right) \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

yazılır. Burada, $U(\rho, z) = 0$ alınmıştır. Çünkü Denklem 'e göre elipsoid içinde potansiyel değeri sıfırdır. Daha sonra Pauli matrislerin değerlerinin,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.48)$$

eşit olduğunu dikkate alarak (Griffiths 2004), Hamilton ifadesini,

$$\begin{aligned}H &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \\ & i \frac{\hbar \omega_c}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} + \frac{1}{2} \mu_B B \left(g + \frac{6A}{\mu_B B} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\ & i \alpha_R \left(-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin \phi + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cos \phi \right) \frac{\partial}{\partial \rho} - \\ & \frac{\alpha_R}{\rho} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cos \phi + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \sin \phi \right) \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)\end{aligned}\quad (3.49)$$

şeklinde yazalım. Elde ettiğimiz ifadeyi sadeleştirmeye çalışalım. Bunun için tüm matris terimlerini bir arada yazalım. Burada ifade,

$$\begin{aligned}H &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - i \frac{\hbar \omega_c}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \\ & \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mu_B B g^* & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \mu_B B g^* \end{pmatrix} + \\ & \alpha_R \begin{pmatrix} 0 & \cos \phi - i \sin \phi \\ -(\cos \phi + i \sin \phi) & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} - \\ & \frac{\alpha_R}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & \cos \phi - i \sin \phi \\ \cos \phi + i \sin \phi & 0 \end{pmatrix} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)\end{aligned}\quad (3.50)$$

yazabiliriz. Burada, $g^* = g + \frac{6A}{\mu_B B}$ eşittir. Daha sonra,

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi, \quad e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi \quad (3.51)$$

bağlantılarını dikkate alarak (Feynman vd. 1965) Hamilton ifademizi,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - i \frac{\hbar \omega_c}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mu_B B g^* & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \mu_B B g^* \end{pmatrix} + \quad (3.52)$$

$$\alpha_R \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ -e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\alpha_R}{\rho} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)$$

şeklinde yazabiliriz. Sonuç olarak ifade deki matrislerin toplamı şeklinde yazarsak,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - i \frac{\hbar \omega_c}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mu_B B g^* & \alpha_R e^{-i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right) \\ -\alpha_R e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right) & -\frac{1}{2} \mu_B B g^* \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

ifadesini elde ederiz. Elde ettiğimiz Hamilton ifadesini,

$$\Psi = \begin{pmatrix} C_1 \Psi_m \\ C_2 \Psi_{m+1} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

ve dalga fonksiyonunu dikkate alarak Schrödinger denklemini,

$$\begin{pmatrix} H_0 + \frac{1}{2} \mu_B B g^* & \alpha_R e^{-i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right) \\ -\alpha_R e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right) & H_0 - \frac{1}{2} \mu_B B g^* \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 \Psi_m \\ C_2 \Psi_{m+1} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} C_1 \Psi_m \\ C_2 \Psi_{m+1} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

yazalım. Burada,

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - i \frac{\hbar \omega_c}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} \quad (3.56)$$

şeklinde tanımlanmış olup, pertürbasyon terimlerini içermeyen Hamilton ifadesidir. Denklem (3.55)'den gördüğümüz gibi elimizde ψ_m ve ψ_{m+1} dalga fonksiyonlarını içeren iki denklem vardır. Bu denklemleri,

$$C_1 H_0 \psi_m + C_1 \frac{1}{2} \mu_b B g^* \psi_m + C_2 \alpha_R e^{-i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right) \psi_{m+1} = C_1 E \psi_m \quad (3.57)$$

$$C_2 H_0 \psi_{m+1} - C_2 \frac{1}{2} \mu_b B g^* \psi_{m+1} - C_1 \alpha_R e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(i \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right) \psi_m = C_2 E \psi_{m+1} \quad (3.58)$$

olacak şekilde açık yazalım.

3.5.2. Schrödinger denkleminin çözümü

Bir önceki denklemlerde pertürbasyon içermeyen Hamilton ifadesini $H_0 \psi_m = E_m \psi_m$, $H_0 \psi_{m+1} = E_{m+1} \psi_{m+1}$ denklemleri şeklinde yazalım. Daha sonra Denklem 'deki tanımladığımız dalga fonksiyonunu dikkatte alarak ψ_m ve ψ_{m+1} dalga fonksiyonlarımızı,

$$\psi_m(\rho, \phi, z) = e^{im\phi} R_m(\rho) \chi_\rho(z) \quad (3.59)$$

$$\psi_{m+1}(\rho, \phi, z) = e^{i(m+1)\phi} R_{m+1}(\rho) \chi_\rho(z) \quad (3.60)$$

şeklinde yazalım. Yukarıda yazdığımız pertürbasyon terimlerini içermeyen Schrödinger denklemlerinin çözümlerini elde edelim ve Denklem (3.57) ile Denklem (3.58)'de yerlerine yazalım. Pertürbasyon terimlerini içermeyen Schrödinger denklemlerine bakılırsa bunlar birbirlerinden m kuantum sayısına göre farklılık göstermektedir. Dolayısıyla eğer biz m kuantum sayısında bağlı denklemini çözersek diğerinin çözümü m yerine $m+1$ yazılarak bulunur. Kolaylık açısından $H_0 \psi_m = E_m \psi_m$ denkleminin çözümünü elde etmeye çalışalım. Bunun için bu denklemi,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_m - i \frac{\hbar \omega_c}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_m + \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} \psi_m = E_m \psi_m \quad (3.61)$$

yazalım. Daha sonra bu denklemi değişkenlerine göre,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) - i \frac{\hbar \omega_c}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} \right) e^{im\phi} R_m(\rho) \chi_\rho(z) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{im\phi} R_m(\rho) \chi_\rho(z) = E_m e^{im\phi} R_m(\rho) \chi_\rho(z) \quad (3.62)$$

olacak şekilde ayrı yazalım. Denklemin her iki tarafını $e^{-im\phi}$ ve $\chi_\rho^*(z)$ ifadelerine çarpalım. Daha sonra bölümün başında bahsettiğimiz adyabatik yaklaşımını dikkate alarak bu denklemi sadeleştirilirse,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \right) + \frac{\hbar \omega_c m}{2} + \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} \right) R_m(\rho) \chi_\rho^*(z) \chi_\rho(z) - R_m(\rho) \chi_\rho^*(z) \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi_\rho(z) = E_m R_m(\rho) \chi_\rho^*(z) \chi_\rho(z) \quad (3.63)$$

şeklinde bir denklem elde ederiz. Burada,

$$-\chi_\rho^*(z) \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \chi_\rho(z) = E_z \quad (3.64)$$

olduğunu bilerek,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \right) + \frac{\hbar \omega_c m}{2} + \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} \right) R_m(\rho) + E_z R_m(\rho) = E_m R_m(\rho) \quad (3.65)$$

adyabatik yaklaşım sonucu meydana gelen E_z şeklinde bir etkin potansiyelli pertürbasyon terimi içermeyen denklem elde ederiz. E_z 'nin değeri Denklem 'i çözümlenerek bulunur. Denklem (3.64)'e dikkatlice bakılırsa, tabanı $L(\rho) = L_0 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R_0^2}}$ şeklinde ρ 'ya bağlı olarak değişen sonsuz kuyu potansiyel içinde hapis olmuş elektronun dalga denkleminde yani,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \chi_\rho(z)}{\partial z^2} = E_z \chi_\rho(z) \quad (3.66)$$

denkleminde benzerdir (Fox ve Ispasoiu 2006). Elektronun elipsoid dışında bulunma olasılığı sıfır olduğunu ve $\chi_\rho(z = L(\rho)) = 0$ sınır koşulunu kabul ederek yukarıdaki denklemin çözümü,

$$\chi_\rho(z) = \sqrt{\frac{2}{L(\rho)}} \sin \left(\frac{n\pi z}{L(\rho)} + n\pi \right) \quad (3.67)$$

şeklinde olup, elektronun enerji spektrumu,

$$E_z = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2\mu L(\rho)^2} \quad (3.68)$$

şeklinde buluruz. İfade den görüldüğü elipsoid içindeki elektronun z yöndeki enerjisi $n = 0, 1, 2, \dots$, kuantum sayısına bağlı olarak kesitli değerleri almaktadır. Daha sonra elektronun $|\rho| \ll R_0$ bölgede bulunduğunu varsayarak, enerji ifadesindeki $L(\rho)$ fonksiyonun Taylor serisiyle (Abramowitz ve Stegun 1968) ikinci terimine kadar seri olarak açarsak, Denklem (3.65)'deki E_z 'nin değerini,

$$E_z = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2\mu L_0^2} + \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2 \rho^2}{2\mu R_0^2 L_0^2} = \frac{\hbar^2}{2\mu} (\gamma + \beta^2 \rho^2) \quad (3.69)$$

olarak buluruz. Burada,

$$\gamma = \frac{\pi^2 n^2}{L_0^2}, \quad \beta = \frac{\pi n}{R_0 L_0} \quad (3.70)$$

parametreleri tanımlanmıştır. Elde ettiğimiz enerji ifadesini Denklem (3.65)'de,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \right) + \frac{\hbar \omega_c m}{2} + \frac{\mu \omega_c^2 \rho^2}{8} + \frac{\hbar^2}{2\mu} (\gamma + \beta^2 \rho^2) \right) \times \quad (3.71)$$

$$R_m(\rho) = E_m R_m(\rho)$$

yazalım. Sonra denklemin her iki tarafını $-\frac{2\mu}{\hbar^2}$ ifadesine çarpalım ve denklemin sağ tarafındaki ifadeyi denklemin solunda,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{2\mu \hbar \omega_c m}{\hbar^2} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{2\mu \mu \omega_c^2 \rho^2}{\hbar^2} \frac{\partial}{\partial \rho} - (\gamma + \beta^2 \rho^2) + \frac{2\mu}{\hbar^2} E_m \right) \times \quad (3.72)$$

$$R_m(\rho) = 0$$

yazalım. Daha sonra birkaç matematiksel işlemlerden sonra yukarıdaki denklemi

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} R + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} R - \frac{m^2}{\rho^2} R + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} E_m - \frac{\mu^2 \rho^2}{4\hbar^2} \Omega^2 + \frac{\mu \omega_c m}{\hbar} \right) R = 0 \quad (3.73)$$

şeklinde yazabiliriz. Denklem daha anlaşılır olması için $R_m(\rho) \equiv R$ şeklinde yazdık. Bu denklemde,

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \frac{4\hbar^2}{\mu^2} \beta^2} \quad (3.74)$$

ve

$$E' = E_m - \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma^2 \quad (3.75)$$

parametreleri tanımlanmıştır. Yukarıda Denklem (3.73)'in çözümünü elde etmeye çalışalım. Bunun için denklemde ρ değişkenini $\rho = \sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\Omega}} \xi$ olarak tanımlayalım. Sonra, bunun $R(\xi)$ fonksiyonunun yeni tanımladığımız ξ değişkenine göre türevini alalım. Türev işlemleri aşağıdaki gibi olur,

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{d\xi} \frac{d\xi}{d\rho} = \sqrt{\frac{\mu\Omega}{2\hbar}} \xi \frac{dR}{d\xi}, \quad (3.76)$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} = \frac{d\xi}{d\rho} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dR}{d\rho} \right) = \frac{2\mu\Omega}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \frac{dR}{d\xi} + \xi \frac{d^2R}{d\xi^2} \right). \quad (3.77)$$

Hesapladığımız bu ifadeleri Denklem 'de,

$$\begin{aligned} & \frac{\mu\Omega}{\hbar} \left(\frac{dR}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2R}{d\xi^2} \right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\Omega}} \xi} \sqrt{\frac{2\mu\Omega}{\hbar}} \xi \frac{dR}{d\xi} - \frac{m^2}{\left(\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\Omega}} \xi \right)^2} R \\ & + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} E' - \frac{\mu^2 \left(\sqrt{\frac{2\hbar}{\mu\Omega}} \xi \right)^2}{4\hbar^2} - \Omega^2 + \frac{\mu\omega_c m}{\hbar} \right) R = 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

yazalım. Bu denklemi sadeleştirdikten sonra,

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR}{d\xi} + \frac{1}{4} \left(\frac{4M}{\xi} - \frac{m^2}{\xi^2} - 1 \right) R = 0 \quad (3.79)$$

ifadesini elde ederiz. Burada,

$$M = \frac{E'}{\hbar\Omega} + \frac{\omega_c m}{\Omega} \quad (3.80)$$

parametresi tanımlanmıştır. Denklem (3.79) literatürde Kummer denklemi olarak bilinir (Abramowitz ve Stegun 1968; Kummer 1837). Bunun çözümü,

$$R(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} g(\xi) \quad (3.81)$$

şeklinde aranır. Bu fonksiyonun ξ göre bir ve iki kere türevini

$$\frac{dR}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi}} g = -\frac{1}{2\xi^{\frac{3}{2}}} g + \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{d}{d\xi} g, \quad (3.82)$$

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d}{d\xi} \frac{1}{\sqrt{\xi}} g \right) = \frac{3}{4} \xi^{-\frac{5}{2}} g - \xi^{-\frac{3}{2}} \frac{dg}{d\xi} + \xi^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2g}{d\xi^2} \quad (3.83)$$

alalım. Türev işleminden sonra yukarıda elde ettiğimiz ifadeleri Denklem (3.79)'de yazalım ve sadeleştirelim. Bu işlemlerden sonra,

$$\frac{d^2g}{d\xi^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{4M}{\xi} - \frac{m^2-1}{\xi^2} - 1 \right) g = 0 \quad (3.84)$$

denklemini elde ederiz. Daha sonra $g(\xi)$ fonksiyonunu,

$$g(\xi) = \xi^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\xi} h(\xi) \quad (3.85)$$

olarak tanımlayalım. Burada $h(\xi)$ fonksiyonu kuvvet serisi olup bunu,

$$h(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \quad (3.86)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada a_n katsayı olup bunun serideki n sayısına bağlıdır. Denklem (3.85)'deki fonksiyonun ξ 'e göre iki türevini alalım ve Denklem (3.84)'de yazalım. Birkaç matematiksel işlemlerden sonra,

$$\xi \frac{d^2h}{d\xi^2} + (m+1-\xi) \frac{dh}{d\xi} + n_\rho h = 0 \quad (3.87)$$

ifadesini elde ederiz. Burada,

$$n_\rho = M - \frac{m+1}{2} \quad (3.88)$$

eşittir. Burada, diferansiyel denklemin çözümü olması için $n_\rho = 0, 1, 2, \dots$ değerleri alması gerekmektedir. Bu denklemin çözümü bize dejenere hypergeometrik fonksiyonunu vermektedir. Yani,

$$h(\xi) = {}_1F_1(-n_\rho, m+1, \xi) \quad (3.89)$$

şeklindedir. Burada, dejenere hypergeometrik fonksiyonun seri açılımı,

$${}_1F_1(-n_\rho, m+1, \xi) = a_0 - a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + O(\xi)^4 \quad (3.90)$$

şeklindedir. Burada,

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{n_\rho}{(M+1)} \frac{1}{1!}$$

$$a_2 = \frac{n_\rho(n_\rho-1)}{(M+1)(M+2)} \frac{1}{2!} \quad (3.91)$$

$$a_3 = \frac{n_\rho(n_\rho-1)(n_\rho-2)}{(M+1)(M+2)(M+3)} \frac{1}{3!}$$

Bu fonksiyon aşağıdaki gibi,

$${}_1F_1(-n_\rho, m+1, \xi) = \left(\frac{n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} L_{n_\rho}^m \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right) \quad (3.92)$$

Laguerre polinomlarına dönüştürülebilir (Landau ve Lifshitz 2013). Bu dönüştürmenin amacı biraz sonra hesaplayacağımız $\int \Psi^* \Psi dV$ olan integralin çözümünü hesaplarken değerinin kolay bulunması için yapılmıştır. Burada,

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\Omega}} \quad (3.93)$$

parametresi tanımlanmıştır. Yukarıdaki hesaplamalardan sonra Denklem (3.61)'in tam çözümlerini,

$$\psi_m(\rho, \phi, z) = \frac{e^{im\phi}}{\lambda\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{m}{2}} \times$$

$$L_{n_\rho}^m \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right) \sqrt{\frac{2}{L(\rho)}} \sin \left(\frac{n\pi z}{L(\rho)} + n\pi \right) \quad (3.94)$$

ve $m + 1$ durum için ,

$$\psi_{m+1}(\rho, \phi, z) = \frac{e^{i(m+1)\phi}}{\lambda\sqrt{2\pi}} \left(\frac{n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m + 2)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{m+1}{2}} \times$$

$$L_{n_\rho}^{m+1} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right) \sqrt{\frac{2}{L(\rho)}} \sin \left(\frac{n\pi z}{L(\rho)} + n\pi \right) \quad (3.95)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan ise Denklem (3.88) ve Denklem (3.80)'deki bağlantıları dikkate alarak Denklem (3.75)'deki E_m enerji spektrum ifadesini buluruz. Aynı işlemleri yaparak $m + 1$ durumu için E_{m+1} enerji spektrum ifadesi bulunur. Şimdi,

$$E_m = \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma^2 - \frac{\hbar\omega_c m}{2} + \hbar\Omega \left(n_\rho + \frac{m+1}{2} \right) \quad (3.96)$$

ve

$$E_{m+1} = \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma^2 - \frac{\hbar\omega_c (m+1)}{2} + \hbar\Omega \left(n_\rho + \frac{m+2}{2} \right) \quad (3.97)$$

ifadelerini yazabiliriz.

3.5.3. Toplam Hamiltonyen'e karşılık gelen Schrödinger denkleminin çözümü

Bölümün bir önceki kısmında elde ettiğimiz Denklem (3.94)-(3.97) enerji spektrum ifadelerini ve dalga fonksiyonları Denklem (3.57) ve (3.58) Denklem yazarak E enerji spektrumunun değerini bulmaya çalışalım. Bunun için bahsettiğimiz ifadeleri bu denklemlerde yazalım. Birkaç matematiksel işlemlerden sonra,

$$\left(E_m + \frac{1}{2} \mu_B B g^* - E \right) C_1 R_m \chi_\rho + \alpha_R \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m+1}{\rho} - \frac{eB\rho}{2\hbar} \right) C_2 R_{m+1} \chi_\rho = 0 \quad (3.98)$$

$$\left(E_{m+1} - \frac{1}{2}\mu_B B g^* - E\right) C_2 R_{m+1} \chi_\rho - \alpha_R \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{eB\rho}{2\hbar}\right) C_1 R_m \chi_\rho = 0 \quad (3.99)$$

denklemleri elde edilir. Denklemlerin her ikisi de z 'den bağımsız olduğu için $\int \chi^* \chi dz = 1$ olduğunu bilerek denklemlerin her iki tarafını χ_ρ^* çarpalım. Daha sonra Denklem soldan R_m^* ve Denklem soldan R_{m+1}^* çarpalım. Bu işlem sonucunda,

$$\left(E_m + \frac{1}{2}\mu_B B g^* - E\right) C_1 R_m^* R_m + \alpha_R C_2 R_m^* \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m+1}{\rho} - \frac{eB\rho}{2\hbar}\right) R_{m+1} = 0 \quad (3.100)$$

$$\left(E_{m+1} - \frac{1}{2}\mu_B B g^* - E\right) C_2 R_{m+1}^* R_{m+1} - \alpha_R C_1 R_{m+1}^* \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{m}{\rho} + \frac{eB\rho}{2\hbar}\right) R_m = 0 \quad (3.101)$$

denklemleri elde edilir. İşlemlerin bir sonraki adımında bu iki denklemlerin ρ 'ya göre integralini alalım. Burada,

$$\left(E_m + \frac{1}{2}\mu_B B g^* - E\right) C_1 \int_0^\infty R_m^* R_m \rho d\rho + \alpha_R C_2 \left(\int_0^\infty R_m^* \frac{\partial}{\partial \rho} R_{m+1} \rho d\rho - (m+1) \int_0^\infty R_m^* \frac{1}{\rho} R_{m+1} \rho d\rho - \frac{eB}{2\hbar} \int_0^\infty R_m^* \rho R_{m+1} \rho d\rho \right) = 0 \quad (3.102)$$

$$\left(E_{m+1} - \frac{1}{2}\mu_B B g^* - E\right) C_2 \int_0^\infty R_{m+1}^* R_{m+1} \rho d\rho - \alpha_R C_1 \left(\int_0^\infty R_{m+1}^* \frac{\partial}{\partial \rho} R_m \rho d\rho + m \int_0^\infty R_{m+1}^* \frac{1}{\rho} R_m \rho d\rho + \frac{eB}{2\hbar} \int_0^\infty R_{m+1}^* \rho R_m \rho d\rho \right) = 0 \quad (3.103)$$

denklemlerini elde ederiz.

Bölümün bir önceki kısmından Denklem (3.102) ve Denklem (3.103)'den görüldüğü gibi toplamda altı tane integral elde ettik. Bu integrallerin çözümleri,

$$\int_0^\infty x^\lambda e^{-cx} L_m^\lambda(cx) L_n^\lambda(cx) dx = \frac{\Gamma(\lambda + n + 1)}{n! c^{\lambda+1}} \delta_{n,m} \quad (3.104)$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-cx} L_m^\gamma(cx) L_n^\lambda(cx) dx = \frac{(1+\gamma)_m (1-\alpha+\lambda)_n \Gamma(\alpha)}{m! n! c^\alpha} \times {}_3F_2(-m, \alpha, \alpha - \lambda; 1 + \gamma, \alpha - \lambda - n; 1) \quad (3.105)$$

$$\int_0^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-cx} L_m^\gamma(cx) L_n^\lambda(cx) dx = \frac{(1+\gamma)_m \Gamma(\lambda)}{m! c^\lambda} \quad (3.106)$$

integral bağlantıları dikkate alınarak bulunur (Gradshteĭn ve Zwillinger 2015). İlk önce $\int_0^{\infty} R_m^* R_m \rho d\rho$ ve $\int_0^{\infty} R_{m+1}^* R_{m+1} \rho d\rho$ integrallerin değerlerini bulmaya çalışalım. Bu integrallerden m kuantum sayısı olanını çözelim. Diğerinin çözümü ise m yerine $m+1$ konularak değeri bulunur. Radyal kısmına bağlı $R(\rho)$ fonksiyonunun ρ değişkenini $x = \frac{\rho^2}{2\lambda^2}$ şeklinde tanımlayalım.

Burada şunun altını çizelim, radyal kısmına bağlı hesaplayacağımız dalga fonksiyonumuz m kuantum sayısına göre farklılık göstermektedir. Ayrıca, ρ değişken üzerinden tanımladığımız x değişkeni λ parametresini içermektedir. Bu parametre kendi sırasında n kuantum sayısını içerir. İntegraller hesaplanırken $m+1$ ve m kuantum sayılı radyal fonksiyonlarındaki λ parametreler eşit alınmıştır. Buna göre $R(\rho)$ fonksiyonunu,

$$R(x) = x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^m(x) \quad (3.107)$$

şeklinde yazabiliriz. Daha sonra $\rho d\rho = \lambda^2 dx$ ve $\rho = \lambda\sqrt{2x}$ olduğunu bilerek $\int_0^{\infty} R_m^* R_m \rho d\rho$ integralini,

$$\int_0^{\infty} R_m^* R_m \rho d\rho = \int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_{n_\rho}^m(x) L_{n_\rho}^m(x) \lambda^2 dx \quad (3.108)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu integral Denklem (3.104)'deki integral bağlantısına benzemektedir. Böylece bu integralin değeri,

$$\tau_1 = \int R_m^*(\rho) R_m(\rho) \rho d\rho = \lambda^2 \frac{\Gamma(m+n_\rho+1)}{n_\rho!} \quad (3.109)$$

şeklinde bulunur. Aynı şekilde $\int_0^{\infty} R_{m+1}^* R_{m+1} \rho d\rho$ değerini,

$$\tau_2 = \int R_{m+1}^*(\rho) R_{m+1}(\rho) \rho d\rho = \lambda^2 \frac{\Gamma(m+n_\rho+2)}{n_\rho!} \quad (3.110)$$

olarak buluruz. Bir sonraki adımda $\int_0^\infty R_m^* \frac{d}{d\rho} R_{m+1} \rho d\rho$ ve $\int_0^\infty R_{m+1}^* \frac{d}{d\rho} R_m \rho d\rho$

integrallerin değerini bulalım. Bunun için yukarıda yaptığımız gibi ρ değişkenini x üzerinden yazalım. Burada,

$$\int_0^\infty R_m^* \frac{d}{d\rho} R_{m+1} \rho d\rho = \lambda \sqrt{2} \int_0^\infty x^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^m(x) \frac{d}{dx} x^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m+1}(x) dx \quad (3.111)$$

olarak yazalım. Daha sonra integraldeki türev altındaki $x^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m+1}$ ifadesinin türevini alalım. Bu işlem sonucunda,

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m+1} = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{m+1}{2}} \left(((m+1)x^{-1} - 1) L_{n_\rho}^{m+1} - 2L_{n_\rho}^{m+2} \right) \quad (3.112)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeyi integralde yazalım ve integrali

$$\int_0^\infty R_m^* \frac{d}{d\rho} R_{m+1} \rho d\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_0^\infty x^{m+1} e^{-x} \left((m+1)x^{-1} L_{n_\rho}^m L_{n_\rho}^{m+1} - L_{n_\rho}^m L_{n_\rho}^{m+1} - 2L_{n_\rho}^m L_{n_\rho}^{m+2} \right) dx \quad (3.113)$$

sadeleştirelim. Bu integralin değerini ayrı ayrı çözmeye çalışalım. İlk olarak Laguerre polinomların $L_{n_\rho-1}^{m+2} = L_{n_\rho}^{m+2} - L_{n_\rho}^{m+1}$ özelliğini dikkate alarak (Abramowitz ve Stegun 1968) yukarıdaki integrali

$$\int_0^\infty R_m^* \frac{d}{d\rho} R_{m+1} \rho d\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_0^\infty x^{m+1} e^{-x} \left((m+1)x^{-1} L_{n_\rho}^m L_{n_\rho}^{m+1} + L_{n_\rho}^m L_{n_\rho}^{m+1} - 2L_{n_\rho}^m L_{n_\rho}^{m+2} \right) dx \quad (3.114)$$

şeklinde yazalım. Bu integralin değeri Denklem (3.105) ve (3.106) Denklem bağlantıları dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \int_0^\infty R_m^* \frac{d}{d\rho} R_{m+1} \rho d\rho = \frac{\lambda(m+1)}{\sqrt{2}} \frac{(m+1)_{n_\rho}}{n_\rho!} \Gamma(m+1) + \\ &\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \frac{(m+2)_{n_\rho} (-1)_{n_\rho} \Gamma(m+2)}{(n_\rho!)^2} {}_3F_2(-n_\rho, m+2, 2; m+2, 2-n_\rho; 1) \\ &- \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} \frac{(m+1)_{n_\rho}}{n_\rho!} \Gamma(m+2) \end{aligned} \quad (3.115)$$

olarak elde ederiz. Şimdi ise $\int_0^\infty R_{m+1}^* \frac{d}{d\rho} R_m \rho d\rho$ integralinin değerini bulmaya çalışalım. Bunun için yukarıda yaptığımız gibi, integrali,

$$\int_0^\infty R_{m+1}^* \frac{d}{d\rho} R_m \rho d\rho = \lambda \sqrt{2} \int_0^\infty x^{\frac{m+2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m+1}(x) \frac{d}{dx} x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^m(x) dx \quad (3.116)$$

şeklinde yazalım ve sonra $x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^m(x)$ ifadenin türevini alalım. Bu işlemden sonra,

$$\int_0^\infty R_{m+1}^* \frac{d}{d\rho} R_m \rho d\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_0^\infty x^{m+1} e^{-x} (2L_{n_\rho}^{m+1} L_{n_\rho-1}^{m+1} + mx^{-1} L_{n_\rho}^{m+1} L_{n_\rho}^m - L_{n_\rho}^{m+1} L_{n_\rho}^m) dx \quad (3.117)$$

integralini elde ederiz. Daha sonra $L_{n_\rho-1}^{m+1} = L_{n_\rho}^{m+1} - L_{n_\rho}^m$ bağlantısını dikkate alarak yukarıdaki integrali,

$$\int_0^\infty R_{m+1}^* \frac{d}{d\rho} R_m \rho d\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_0^\infty x^{m+1} e^{-x} (-2L_{n_\rho}^{m+1} L_{n_\rho}^{m+1} + L_{n_\rho}^{m+1} L_{n_\rho}^m + mx^{-1} L_{n_\rho}^{m+1} L_{n_\rho}^m) dx \quad (3.118)$$

şeklinde yazalım. Yukarıdaki Denklem (3.104)-(3.106) integral bağlantılarını dikkate alarak Denklem çözersek,

$$\begin{aligned} v_2 = \int_0^\infty R_{m+1}^* \frac{d}{d\rho} R_m \rho d\rho &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \frac{(m+2)_{n_\rho} (-1)_{n_\rho} \Gamma(m+2)}{(n_\rho!)^2} \times \\ & {}_3F_2(-n_\rho, m+2, 2; m+2, 2-n_\rho; 1) + \\ & \frac{\lambda m (m+1)_{n_\rho} \Gamma(m+1)}{\sqrt{2} n_\rho!} - \frac{2\lambda \Gamma(m+n_\rho+2)}{\sqrt{2} n_\rho!} \end{aligned} \quad (3.119)$$

ifadesi elde edilir. Hesaplamalarımızın bir sonraki adımında $\int_0^\infty R_m^* \frac{1}{\rho} R_{m+1} \rho d\rho$ ve $\int_0^\infty R_{m+1}^* \frac{1}{\rho} R_m \rho d\rho$ integrallerin değerlerini bulmaya çalışalım. Bunun için aynı yukarıda yaptığımız gibi integrali x değişken üzerinden

$$\int_0^\infty R_m^* \frac{1}{\rho} R_{m+1} \rho d\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_0^\infty x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^m x^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m+1} x^{-\frac{1}{2}} dx, \quad (3.120)$$

$$\int_0^{\infty} R_{m+1}^* \frac{1}{\rho} R_m \rho d\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} x^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m+1} x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^m x^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (3.121)$$

yazalım. Daha sonra bu integraller sadeleştirilirse,

$$\int_0^{\infty} R_m^* \frac{1}{\rho} R_{m+1} \rho d\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_{n_\rho}^m L_{n_\rho}^{m+1} dx \quad (3.122)$$

$$\int_0^{\infty} R_{m+1}^* \frac{1}{\rho} R_m \rho d\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} x^m e^{-x} L_{n_\rho}^{m+1} L_{n_\rho}^m dx \quad (3.123)$$

ifadeleri elde edilir. Bu integrallerin çözümü,

$$\kappa = \int_0^{\infty} R_{m+1}^* \frac{1}{\rho} R_m \rho d\rho = \int_0^{\infty} R_m^* \frac{1}{\rho} R_{m+1} \rho d\rho = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \frac{(1+m)_{n_\rho}}{n_\rho!} \Gamma(m+1) \quad (3.124)$$

şeklinde bulunur. Son olarak, yine de aynı yukarıdaki işlemler tekrarlayarak,

$$\int_0^{\infty} R_m^* \rho R_{m+1} \rho d\rho \quad \text{ve} \quad \int_0^{\infty} R_{m+1}^* \rho R_m \rho d\rho$$

integrallerin değerlerini bulalım. İlk olarak integralleri x değişken üzerinden

$$\int_0^{\infty} R_m^* R_{m+1} \rho^2 d\rho = \int_0^{\infty} x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^m x^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m+1} \lambda \sqrt{2x} \lambda^2 dx, \quad (3.125)$$

$$\int_0^{\infty} R_{m+1}^* R_m \rho^2 d\rho = \int_0^{\infty} x^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m+1} x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^m \lambda \sqrt{2x} \lambda^2 dx \quad (3.126)$$

yazalım ve sadeleştirdikten sonra,

$$\eta = \int R_m^*(\rho) \rho R_{m+1}(\rho) \rho d\rho = \int R_{m+1}^*(\rho) \rho R_m(\rho) \rho d\rho = \lambda^3 \sqrt{2} \frac{(m+2)_{n_\rho} (-1)_{n_\rho} \Gamma(m+2)}{(n_\rho!)^2} {}_3F_2(-n_\rho, m+2, 2; m+2, 1-n_\rho; 1) \quad (3.127)$$

olarak buluruz.

3.5.4. Toplam Enerji Spektrumun Elde Edilmesi

Bölümün bu kısmında bir önceki kısımda bulduğumuz τ_1 , τ_2 , ν_1 , ν_2 , κ ve η integral ifadelerini Denklem (3.102) ve Denklem (3.103) yazarak toplam enerji spektrum E ifadesini bulmaya çalışalım. İlk önce söz konusu olan denklemlerimizi aşağıdaki gibi,

$$\begin{pmatrix} \left(E_m + \frac{1}{2} g^* \mu_B B - E \right) \tau_1 & \alpha_R \left(\nu_1 - (m+1) \kappa - \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) \\ -\alpha_R \left(\nu_2 + m\kappa + \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) & \left(E_{m+1} - \frac{1}{2} g^* \mu_B B - E \right) \tau_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.128)$$

matris şeklinde yazalım. Bu ifade de $|C_1 \ C_2|^T \neq 0$ olduğu için yukarıdaki lineer denklem sistemini,

$$\begin{vmatrix} \left(E_m + \frac{1}{2} g^* \mu_B B - E \right) \tau_1 & \alpha_R \left(\nu_1 - (m+1) \kappa - \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) \\ -\alpha_R \left(\nu_2 + m\kappa + \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) & \left(E_{m+1} - \frac{1}{2} g^* \mu_B B - E \right) \tau_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.129)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan ise bu ifadenin determinantını alarak E 'in değerini buluruz. Burada,

$$\begin{aligned} & \left(E_m + \frac{1}{2} g^* \mu_B B - E \right) \tau_1 \left(E_{m+1} - \frac{1}{2} g^* \mu_B B - E \right) \tau_2 + \\ & \alpha_R \left(\nu_1 - (m+1) \kappa - \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) \alpha_R \left(\nu_2 + m\kappa + \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.130)$$

Bu denkleminin çözümü sonucunda,

$$E_\sigma = \frac{(\varepsilon_m + \varepsilon_{m+1}) - \sigma \sqrt{C}}{2} \quad (3.131)$$

ifadesi elde edilir. Burada, $\sigma = \pm 1$

$$\varepsilon_{m+1} = E_{m+1} - \frac{1}{2} g^* \mu_B B \quad (3.132)$$

$$\varepsilon_m = E_m + \frac{1}{2} g^* \mu_B B \quad (3.133)$$

ve

$$C = (\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1})^2 + 4 \frac{\alpha_R^2}{\tau_1 \tau_2} \left(m\kappa + \nu_2 + \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) \left((m+1)\kappa - \nu_1 + \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) \quad (3.134)$$

parametreleri tanımlanmıştır. Denklem (3.131)'da elde ettiğimiz enerji ifadesinden görüldüğü gibi incelediğimiz kuantum sistemindeki elektronun enerji spektrumu ikiye ayrılmaktadır. Elektronun enerji spektrumundaki bu yarıлма Rashba spin-yörünge etkileşimi sonucundan kaynaklanmaktadır. Enerji ifadesindeki artı işaretli durumuna elektron spinin yukarı ve eksi işaretli duruma elektron spinin aşağı olan enerji durumlarına karşılık gelmektedir. Elektron spinin farklı yönler arasındaki durum enerji durumları arasındaki fark,

$$\Delta E = \sqrt{(\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1})^2 + 4 \frac{\alpha_R^2}{\tau_1 \tau_2} \left(m\kappa + \nu_2 + \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) \left((m+1)\kappa - \nu_1 + \frac{eB}{2\hbar} \eta \right)} \quad (3.135)$$

değerine eşittir. Buradan ise, elektronun enerji değerindeki yarıлма şiddeti α sabiti ile orantılı olduğu görülmektedir. Ayrıca, sisteme uygulanan manyetik alanın değişimi, sıcaklık, x parametresi gibi parametrelerin değişimi de yarıлма şiddetini etkilediği Denklem 'den görülmektedir. Buna ilave olarak, eğer enerji ifadesinde $\alpha_R = 0$, $x = 0$ ve $E_{m+1} = E_m$ olduğunu kabul edersek, bu durumda,

$$\Delta E = g\mu_B B \quad (3.136)$$

sistemimizdeki elektronun enerjisinin sadece Zeeman etkileşiminden kaynaklanan bir yarıлма olduğunu görürüz.

Sonuç olarak C_1 ve C_2 katsayılarını elde etmeye çalışalım. Bunun için Denklem 'da matris elemanlarını,

$$a = (\varepsilon_m - E_\sigma) \tau_1 \quad (3.137)$$

$$b = \alpha \left(\nu_1 - (m+1)\kappa - \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) \quad (3.138)$$

$$d = -\alpha \left(\nu_2 + m\kappa + \frac{eB}{2\hbar} \eta \right) \quad (3.139)$$

$$c = (\varepsilon_{m+1} - E_\sigma) \tau_2 \quad (3.140)$$

olarak tanımlayalım. Burada ise ,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.141)$$

lineer denklem sisteminden,

$$aC_1 + bC_2 = 0 \quad (3.142)$$

ve

$$cC_1 + dC_2 = 0 \quad (3.143)$$

ifadeleri bulunur. Burada bu iki denklem lineer bağımlı olduğu için C_1 üzerinden C_2 bulunamaz. Bu katsayıların değerlerini bulmamız için bir denkleme daha ihtiyaç vardır. Bu denklemi dalga fonksiyonun ortogonal özelliğini dikkate alarak $\int \Psi^* \Psi dV = 1$ integralini çözerek elde ederiz. İntegrali çözersek,

$$\int (C_1 \psi_m^* \quad C_2 \psi_{m+1}^*) \begin{pmatrix} C_1 \psi_m \\ C_2 \psi_{m+1} \end{pmatrix} dV = 1 \quad (3.144)$$

buradan ise,

$$C_1^2 \int \psi_m^* \psi_m dV + C_2^2 \int \psi_{m+1}^* \psi_{m+1} dV = 1 \quad (3.145)$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra $\int \psi_m^* \psi_m dV = 1$ ve $\int \psi_{m+1}^* \psi_{m+1} dV = 1$ olduğunu bilerek,

$$C_1^2 + C_2^2 = 1 \quad (3.146)$$

ifadesini elde ederiz. Dolayısıyla Denklem ve Denklem 'den,

$$C_1^\sigma = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2}} \quad (3.147)$$

ve

$$C_2^\sigma = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2 + b^2}} \quad (3.148)$$

katsayıların değerlerini elde ederiz. Yukarıda elde ettiğimiz katsayılar E_σ enerji spektrumunu içermektedir. Enerji spektrumu ise σ 'ya bağlıdır. Dolayısıyla, C_1^σ ve C_2^σ katsayılarında σ 'ya bağlı olmaktadır. Bu yüzden bu katsayılarında σ endeksi yazılmıştır. Son olarak Denklem (3.146)'i,

$$\cos^2 \theta^\sigma + \sin^2 \theta^\sigma = 1 \quad (3.149)$$

şeklinde yazarak toplam dalga fonksiyonumuzu,

$$\Psi^\sigma(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta^\sigma \psi_m \\ \sin \theta^\sigma \psi_{m+1} \end{pmatrix} \quad (3.150)$$

şeklinde yazabiliriz.

3.6. Soğurma Katsayı

3.6.1. Düşük boyutlu kuantum yapılarda optik geçişler

Bilindiği üzere, monokromatik ışığın bir homojen malzemenin üzerine düştüğünde, ışığın belli bir kısmı malzemeye hiç etkileşmeden malzemedan geçer, diğer bir kısmı malzeme üzerinden yansıma yapar, ışığın kalan kısmı ise malzemeye etkileşime girer. Etkileşim sonucunda malzemedeki atomların dış kabuğundaki elektronlar ışığı soğurur. Gelen ışığın enerjisi elektronu bulunduğu enerji durumundan bir üst enerji duruma geçiş yapması için yeterliyse, elektron bir üst seviyeye geçiş yapar. Bir üst seviyeye geçiş yapan elektronun enerji durumu uyarılmış halinde olur. Eğer uyarılmış elektronun bulunduğu enerji durumunda stabil (denge durumunda) halinde ise elektron bu durumda kalmaya devam eder, aksine elektron bulunduğu enerji durumundan daha düşük ve daha stabil bir enerji duruma geçiş yapar. Bu geçiş sürecinde elektron, geçişi gerçekleştiren iki enerji durum arasındaki enerji farkı kadar, bir ışık yayılır.

Yukarıda bahsettiğimiz gibi, gelen ışık elektron tarafından soğrulur ve elektron bulunduğu enerji durumundan bir üst enerji duruma geçiş yapar. Gerçekleşen bu fiziksel olay kısaca optik geçiş olarak adlandırılır. Kuantum nokta, kuantum tel, kuantum kuyu gibi, elektronun hareketinin boyut açısından sınırlandırılmış olan, düşük boyutlu kuantum sistemlerinde optik geçişler iki şekilde gerçekleşir. Bunlar, bantlar arası ve bantlar içi optik geçişlerdir. Bantlar arası optik geçişlerde elektron bulunduğu valans bandından iletkenlik bandına geçiş yapar (Şekil 3.9'de 4 ve 5 olarak işaretlenmiş oklar). Bu geçişler gelen ışığın enerjisinin yasak bandının enerjisinin büyük olması durumunda gerçekleşir. Bantlar içi optik geçişlerinde, aynı bant içinde elektron bulunduğu enerji durumundan bir üst enerji durumuna geçiş yapar.

Malzemeye düşen ışığın bu malzeme tarafından soğrulma miktarı,

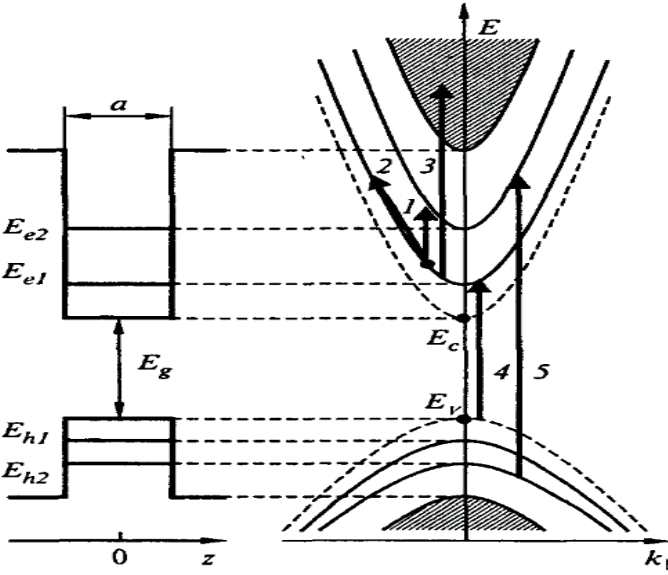
$$I = I_0 e^{-\alpha(\omega)l} \quad (3.151)$$

şeklinde verilen üstel fonksiyonla ifade edilir (Vorobyev vd. 2001). Burada, I_0 ışığın malzeme tarafından soğrulmadan önceki şiddetini ifade eder. Sonra $\alpha(\omega)$ soğrulma katsayısı ve l malzemenin kalınlığıdır. Malzemenin kalınlığı olarak ışığın malzemeye girme ve malzemedan çıkma arasındaki geçen yol

sayılmaktadır. Formüldeki soğurma katsayısını üç boyutlu kuantum sistemleri için,

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^2 e^2}{\varepsilon_0 c n_0 \mu_0^2 \omega V} \sum_{if} |\mathbf{e} \mathbf{p}_{if}|^2 (f(E_i) - f(E_f)) \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \quad (3.152)$$

şeklinde yazılabilir (Vorobyev vd. 2001).



Şekil 3.9. Kuantum kuyudaki optik geçişler (Vorobyev vd. 2001).

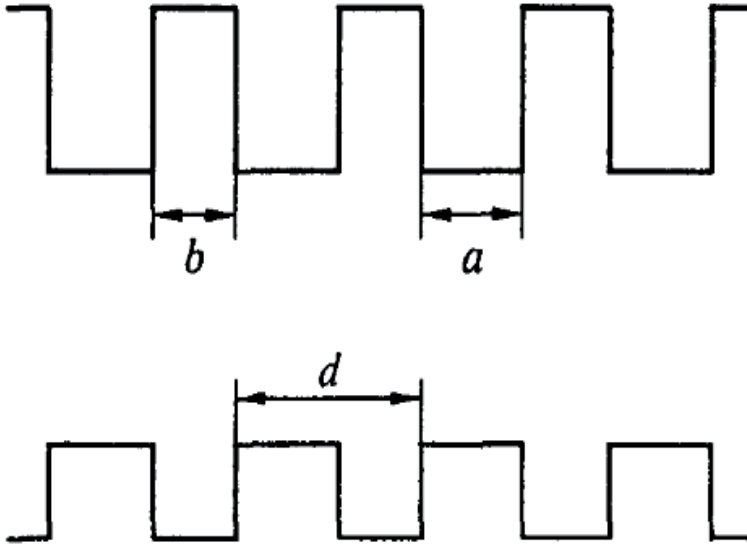
Burada, $\hbar\omega$ foton enerjisi, \mathbf{e} ışığın birim polarizasyon vektörü, n_0 kırılma indisi, μ_0 elektronun kütlesi, ε_0 elektrik geçirgenlik sabiti, e elektronun yükü, c ışık hızı ve V sistemin hacmi. Formüldeki toplama işlemi kuantum sistemindeki optik geçişin başlangıç i ve son f durumların üzerinden gerçekleşmektedir. Ayrıca $f(E)$ fonksiyonu sistemdeki yüklü taşıyıcıların enerjiye göre dağılımı olup, sistemin denge durumunda,

$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1} \quad (3.153)$$

Fermi-Dirac fonksiyonudur.

Soğurma katsayısı malzemenin optik özelliklerini belirleyen karakteristik bir parametredir. Üç boyutlu bir kuantum sisteminde ilerleyen ışığın 1cm^2 alanlık bölgeden $1sn$ geçen fotonların sayısı, ışığın akı yoğunluğu olarak tanımlanır. Ayrıca, malzeme tarafından 1cm^3 hacimlik bölgeden $1sn$ soğrulan foton sayısı bize sistemin bir saniyede birim hacimdeki optik geçişlerin sayısını verir. Böylece, optik geçiş sayısını ışığın akı yoğunluğuna bölersek soğurma katsayısının tanımını elde ederiz.

Kuyu genişliği a ve engel genişliği b olan $d = a + b$ periyotlu N tane tek elektronlu kuantum kuyudan oluşan ve büyüme yönüne dik yönde ilerleyen bir kuantum sistemini düşünelim (Şekil 3.10). Süper örgü olarak bilinen bu kuantum sistemine λ dalga boyuna sahip bir ışın etki ediyorsa ve ışının dalga boyu kuyu genişliğinden $a < \lambda$ büyükse, bu durumda süper örgü sistemimiz optik açısından homojen ortam olarak düşünülebilir ve bu homojen ortamın soğurma katsayısı yukarıda tanımladığımız soğurma katsayısı formülü ile ifade edilebilir. Aynı formül $a \ll \lambda$ durumunda da geçerlidir. Süper örgüdeki engel genişliği kuyu genişliğinden $a \ll b$ çok büyük ve komşu kuyulardaki elektronların bir birler arasındaki etkileşim yok sayılacak kadar küçük ise süper örgüdeki her bir kuantum kuyu izole edilmiş tek elektronlu kuantum sistemi olarak görülebilir. Soğurma katsayısındaki V hacim yerin kuyunun hacmi veya bizim durumumuzda elipsoidin hacmi yazılabilir.



Şekil 3.10. Süper örgünün şematik şekli (Vorobyev vd. 2001).

Soğurma katsayı ifadesinden görüldüğü gibi optik geçişler polarizasyon vektörünün momentum operatörünün matris elemanına olan skaler çarpımıyla belirlenmektedir. Ayrıca, bantlar içi veya bantlar arası izinli optik geçişler momentum operatörünün matris elemanı ile belirlenir. Momentum operatörünün matris elemanı,

$$\mathbf{p}_{if} = \langle f | \mathbf{p} | i \rangle = \int_V F_f^*(\mathbf{r}) \mathbf{p} F_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.154)$$

şeklinde tanımlanır (Vorobyev vd. 2001). Burada, \mathbf{p} momentum operatörü, $F_i(\mathbf{r})$ ve $F_f(\mathbf{r})$ kuantum sistemin başlangıç ve son durumlarının toplam dalga fonksiyonlarına karşılık gelir. Toplam dalga fonksiyonu yukarıda bulduğumuz dalga fonksiyonunun Bloch fonksiyonunun çarpımına,

$$F_i = u_{n_i}(\mathbf{r}) \Psi_i(\mathbf{r}) \quad (3.155)$$

eşittir. Burada, $u_{n_i}(\mathbf{r})$ birinci Brillouin bölgesinin merkezindeki $n_i = c$ iletkenlik veya $n_i = v$ valans bandındaki Bloch fonksiyonunu ifade eder (Bloch 1928).

Tanımladığımız toplam dalga fonksiyonunu momentum operatörünün matris elemanında yazalım ve sonra izinli ve izinsiz optik geçişler için bir seçim kuralı elde etmeye çalışalım. İlk önce Denklem (3.154)'ü,

$$\mathbf{p}_{if} = \int_V \Psi_f^* \Psi_i u_{n_f}^* \mathbf{p} u_{n_i} d\mathbf{r} + \int_V u_{n_f}^* u_{n_i} \Psi_f^* \mathbf{p} \Psi_i d\mathbf{r} \quad (3.156)$$

şeklinde yazalım. Daha sonra sistemimiz için birim hücre elemanını tanımlayalım ve bunun birim hacmini V_0 alalım. Denklem 'deki V hacime göre integrali birim hücre elemanların hacminin toplamı olarak yazalım. Sistemdeki her bir birim hücrenin konumunu \mathbf{a}_l konumu vektörü ile tanımlayalım. Burada, l birim hücrenin numarası olup, hücreler 1 ile N arasında numaralanmıştır. Bahsettiğimiz bu işlemleri matematiksel olarak yazarsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz. Burada,

$$\mathbf{p}_{if} = \sum_{l=1}^N \int_{V_0} \Psi_f^* \Psi_i u_{n_f}^*(\mathbf{r} + \mathbf{a}_l) \mathbf{p} u_{n_i}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_l) d\mathbf{r} + \sum_{l=1}^N \int_{V_0} u_{n_f}^*(\mathbf{r} + \mathbf{a}_l) u_{n_i}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_l) \Psi_f^* \mathbf{p} \Psi_i d\mathbf{r} \quad (3.157)$$

Sistemimizdeki bir birim hücre etrafında Ψ dalga fonksiyonunun az değiştiğini kabul edersek yukarıdaki ifade de dalga fonksiyonlarını integral dışına alınabilir. Bu durumda, yukarıda denklem,

$$\mathbf{p}_{if} = \sum_{l=1}^N \Psi_f^*(\mathbf{a}_l) \Psi_i(\mathbf{a}_l) \int_{V_0}^* u_{n_f}^*(\mathbf{r} + \mathbf{a}_l) \mathbf{p} u_{n_i}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_l) d\mathbf{r} + \sum_{l=1}^N \Psi_f^*(\mathbf{a}_l) \mathbf{p} \Psi_i(\mathbf{a}_l) \int_{V_0}^* u_{n_f}^*(\mathbf{r} + \mathbf{a}_l) u_{n_i}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_l) d\mathbf{r} \quad (3.158)$$

veya

$$\mathbf{p}_{if} = \langle u_{n_f} | \mathbf{p} | u_{n_i} \rangle \int_V \Psi_f^* \Psi_i d\mathbf{r} + \delta_{n_f, n_i} \int_V \Psi_f^* \mathbf{p} \Psi_i d\mathbf{r} \quad (3.159)$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$\langle u_{n_f} | \mathbf{p} | u_{n_i} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0}^* u_{n_f}^*(\mathbf{r}) \mathbf{p} u_{n_i}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.160)$$

optik matris elemanını tanımlanmıştır. Denklem (3.159)'den şu sonuçları elde edebilir. İncelenmekte olan kuantum kuyu sistemimizde optik geçişler iki şekilde gerçekleşmektedir. Yukarıda belirttiğimiz gibi bunlar, bantlar arası ($n_i \neq n_f$) ve bantlar içi ($n_i = n_f$) optik geçişlerdir. Elde ettiğimiz momentum operatörünün matris elemanının bantlar içi optik geçişlerini bizim kuantum sistemimize uygulayalım.

3.6.2. Bantlar içi optik geçişler

Yukarıda belirttiğimiz gibi düşük boyutlu kuantum sistemlerinde bantlar içi optik geçişlerinde elektron gelen ışını soğurur ve bulunduğu enerji durumundan bir üst enerji duruma geçiş yapar. Geçiş süreci sadece foton-elektron şeklinde gerçekleşiyorsa buna direk geçiş denilir. Eğer geçiş süreci foton-elektron ve üçüncü bir kuazi parçacık şeklinde gerçekleşiyorsa buna direk olmayan geçiş denilir.

Kusursuz örgülü kristal yapısına sahip yarıiletkenlerde bantlar içi optik geçişler sadece direk olmayan şekilde gerçekleşmektedir. Optik geçişlerinde elektron-foton sistemi açısından bakıldığında aynı anda hem enerji korunumu hem de momentum korunumu şartının sağlanması gerekmektedir. Yarıiletkenlerde veya üç boyutlu yarıiletken kuantum sistemlerinde bu şartın sağlanması için üçüncü bir parçacığa ihtiyaç vardır. Üçüncü parçacık olarak, kristal kusurları, fonon ve diğer kuazi parçacıklar yer alabilir. Düşük boyutlu

kuantum sistemlerinde ise bantlar içi optik geçişler hem direk hem de direk olmayan şekilde gerçekleşir. Direk olmayan geçişlerin gerçekleşme olasılığı direk geçişlere göre çok daha düşüktür. Çünkü elektron-foton sisteminin etkileşime girme olasılığı diğerine göre çok daha yüksektir. Buradan ise direk geçişlerin soğurma katsayısı direk olmayan geçişe göre büyüktür sonucuna varılır.

Yukarıda kuantum kuyu için Denklem (3.159)'de elde ettiğimiz momentum operatörünün matris elemanı ifadesini, bantlar içi optik geçişler durumunu göz önünde bulundurarak, araştırmakta olan elipsoid kuantum nokta sistemimiz için soğurma katsayı ifadesini elde etmeye çalışalım. Optik geçişlerin direk optik geçiş şeklinde ve iletkenlik bandında gerçekleştiğini varsaymaktayız. Optik geçiş gerçekleşmeden önce elektron durumunu $|i\rangle = |n_\rho nm\rangle$ olarak geçişten

sonraki durumunu $|f\rangle = |n'_\rho n'm'\rangle$ olarak tanımlayalım. Burada, elektronun

başlangıç $(n_\rho nm)$ ve son $(n'_\rho n'm')$ durumlarındaki kuantum sayıları. Gelen ışığın z yönde ilerlediğini, ρ 'ya paralel yönde polarize olduğunu ve e_ρ polarize birim vektörü olduğunu varsaymaktayız. Bunları belirledikten sonra Denklem (3.159),

$$\mathbf{ep}_{if} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} u_{n_f}^*(\mathbf{r}) \mathbf{ep} u_{n_i}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \int_V \Psi_f^* \Psi_i d\mathbf{r} + \delta_{n_f, n_i} \int_V \Psi_f^* \mathbf{ep} \Psi_i d\mathbf{r} \quad (3.161)$$

şeklinde yazalım. Hesaplamalarımızda sadece bantlar içi optik geçişleri dikkate aldığımız için bu ifade deki birinci terim sıfır olacaktır. İfade deki ikinci terimi, $\delta_{n_f, n_i} = 1$ olduğunu bilerek, açık yazarsak,

$$\mathbf{ep}_{if} = \int_V \Psi_f^* (e_\rho p_\rho + e_\phi p_\phi + e_z p_z) \Psi_i d\mathbf{r} \quad (3.162)$$

ifadesini elde ederiz. Burada yukarıda bahsettiğimiz gibi momentum operatörünün sadece p_ρ bileşeni sıfırdan farklı olur. Çünkü gelen ışığın polarize yönü ρ yönüne paraleldir. Dolayısıyla, yukarıdaki ifadeyi,

$$\mathbf{ep}_{if} = \int_V \Psi_f^* p_\rho \Psi_i dV \quad (3.163)$$

veya

$$\mathbf{ep}_{if} = -i\hbar \int_V \Psi_f^* \frac{d}{d\rho} \Psi_i dV \quad (3.164)$$

şeklinde yazabiliriz. Daha sonra Denklem (3.150) elde ettiğimiz dalga fonksiyonunu ilk ve son optik geçişler için ifadelerini yukarıdaki ifademizde,

$$\mathbf{ep}_{if} = -i\hbar \int \left(\cos \theta^{\sigma f} \psi_m^{f*} \quad \sin \theta^{\sigma f} \psi_{m+1}^{f*} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \cos \theta^{\sigma i} \psi_m^i \\ \sin \theta^{\sigma i} \psi_{m+1}^i \end{pmatrix} dV \quad (3.165)$$

yazalım veya

$$\mathbf{ep}_{if} = -i\hbar \int \left(\cos \theta^{\sigma f} \psi_m^{f*} \quad \sin \theta^{\sigma f} \psi_{m+1}^{f*} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} \cos \theta^{\sigma i} \psi_m^i \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \sin \theta^{\sigma i} \psi_{m+1}^i \end{pmatrix} dV \quad (3.166)$$

Bir sonraki adımda bu ifadeyi,

$$\mathbf{ep}_{if} = -i\hbar \int \left(\cos \theta^{\sigma f} \psi_m^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \cos \theta^{\sigma i} \psi_m^i + \sin \theta^{\sigma f} \psi_{m+1}^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \sin \theta^{\sigma i} \psi_{m+1}^i \right) dV \quad (3.167)$$

şeklinde yazalım. İntegraldeki parantezi açalım ve sadeleştirip

$$\begin{aligned} \mathbf{ep}_{if} &= -i\hbar \int \cos \theta^{\sigma f} \cos \theta^{\sigma i} \psi_m^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_m^i \rho d\rho d\phi dz - \\ &- i\hbar \int \sin \theta^{\sigma f} \sin \theta^{\sigma i} \psi_{m+1}^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_{m+1}^i \rho d\rho d\phi dz \end{aligned} \quad (3.168)$$

şeklinde yazalım. Elde ettiğimiz bu ifadeyi integrallerine göre ayrı ayrı çözmeye çalışalım. Önce ilk terimin değerini bulalım. İntegraldeki sabit terimleri,

$$\cos \theta^{\sigma f} \cos \theta^{\sigma i} \int \psi_m^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_m^i \rho d\rho d\phi dz = \cos \theta^{\sigma f} \cos \theta^{\sigma i} \int \psi_m^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_m^i \rho d\rho d\phi dz \quad (3.169)$$

integral dışına alalım. Daha sonra integralde dalga fonksiyonun değerini,

$$\begin{aligned}
 & \cos \theta^{\sigma f} \cos \theta^{\sigma i} \int \psi_m'^* \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_m' \rho d \rho d \phi dz = \\
 & \cos \theta^{\sigma f} \cos \theta^{\sigma i} \int \frac{e^{-im\phi}}{\lambda' \sqrt{2\pi}} \left(\frac{n_p!}{\Gamma(n_p + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda'^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda'^2} \right)^{\frac{m}{2}} \times \\
 & L_{n_p}^m \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda'^2} \right) \sqrt{\frac{2}{L(\rho)}} \sin \left(\frac{n' \pi z}{L(\rho)} + n' \pi \right) \times \\
 & \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{e^{im\phi}}{\lambda \sqrt{2\pi}} \left(\frac{n_p!}{\Gamma(n_p + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{m}{2}} \times \\
 & L_{n_p}^m \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right) \sqrt{\frac{2}{L(\rho)}} \sin \left(\frac{n \pi z}{L(\rho)} + n \pi \right) \rho d \rho d \phi dz
 \end{aligned} \tag{3.170}$$

ve integrali değişkenlerine göre,

$$\begin{aligned}
 & \cos \theta^{\sigma f} \cos \theta^{\sigma i} \int \psi_m'^* \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_m' \rho d \rho d \phi dz = \\
 & \cos \theta^{\sigma f} \cos \theta^{\sigma i} \left(\frac{n_p!}{\Gamma(n_p + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n_p!}{\Gamma(n_p + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} e^{i(-m'+m)\phi} d\phi \times \\
 & \frac{1}{2\pi \lambda' \lambda} \int e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda'^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda'^2} \right)^{\frac{m}{2}} L_{n_p}^m \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda'^2} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{m}{2}} L_{n_p}^m \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right) \rho d \rho \times \\
 & \int_0^{L_0} \sqrt{\frac{2}{L_0}} \sin \left(\frac{n' \pi z}{L_0} + n' \pi \right) \sqrt{\frac{2}{L_0}} \sin \left(\frac{n \pi z}{L_0} + n \pi \right) dz
 \end{aligned} \tag{3.171}$$

yazalım. Burada, z değişkenine bağlı integralde elipsoidin kalınlığını belirleyen parametreyi $L(\rho) = L_0$ eşit olarak aldık. Bir sonraki adımımızda integrali tek tek değişkenlerine göre çözelim. İfade deki ϕ değişkenine göre integralin değeri $m' = m$ şartı sağlanırsa sıfırdan farklı olur. Burada,

$$\Theta = \int_0^{2\pi} e^{i(-m'+m)\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mm'}, \tag{3.172}$$

şeklinde olur. Elipsoidin yüksekliğini belirleyen z değişkenine göre integralin değeri $n' = n$ iken sıfırdan farklı olur. Burada,

$$\Lambda = \frac{2}{L_0} \int_0^{L_0} \sin \left(\frac{\pi z n'}{L_0} + \pi n' \right) \sin \left(\frac{\pi z n}{L_0} + \pi n \right) dz = \delta_{nn'}, \tag{3.173}$$

Buna göre, sonraki hesaplamalarımızda $\lambda' = \lambda$ eşit alınmıştır. Bir sonraki işlemimizde Denklem (3.171)'de son değişken olan ρ değişkenine bağlı integrali çözelim. Bunun çözümünü, yukarıda Denklem (3.102) ve Denklem (3.103)'deki integrallerin çözümünü ararken kullandığımız yöntemi takip edeceğiz. İlk önce integrali x değişken üzerinden,

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{m'}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_{\rho}}^{m'}(x) \frac{\sqrt{2x}}{\lambda} \frac{d}{dx} x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_{\rho}}^m(x) \lambda^2 dx \quad (3.174)$$

olarak yazalım. Daha sonra türev altındaki ifadenin türevini alalım,

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_{\rho}}^m = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{m}{2}} \left(mx^{-1} L_{n_{\rho}}^m - 2L_{n_{\rho}}^{m+1} + L_{n_{\rho}}^m \right). \quad (3.175)$$

Burada, $L_{n_{\rho}-1}^{m+1} = L_{n_{\rho}}^{m+1} - L_{n_{\rho}}^m$ bağlantısı kullanılmıştır. Bu ifadeyi tekrar integralde yazarsak ve sadeleştirirsek,

$$\frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \int_0^{\infty} x^{\frac{m'+m+1}{2}} e^{-x} L_{n_{\rho}}^{m'} \left(mx^{-1} L_{n_{\rho}}^m - 2L_{n_{\rho}}^{m+1} + L_{n_{\rho}}^m \right) dx \quad (3.176)$$

integralini elde ederiz. Burada oluşan üç adet integrallerin değeri,

$$\int_0^{\infty} R_{m'} \frac{d}{d\rho} R_m \rho d\rho = S + U + G \quad (3.177)$$

olarak bulunur. Burada,

$$S = \frac{\lambda\sqrt{2}m}{2} \int_0^{\infty} x^{\frac{m'+m+1}{2}} e^{-x} L_{n_{\rho}}^{m'} L_{n_{\rho}}^m dx = \frac{\lambda\sqrt{2}m}{2} \frac{(m'+1)_{n_{\rho}} \left(m - \frac{m'+m+1}{2} + 1 \right)_{n_{\rho}} \Gamma\left(\frac{m'+m+1}{2}\right)}{n_{\rho}! n_{\rho}!} \times {}_3F_2\left(-n_{\rho}, \frac{m'+m+1}{2}, \frac{m'+m+1}{2} - m; m'+1, \frac{m'+m+1}{2} - m - n_{\rho}; 1\right) \quad (3.178)$$

$$U = -\lambda\sqrt{2} \int_0^{\infty} x^{\frac{m'+m+3}{2}} e^{-x} L_{n_{\rho}}^{m'} L_{n_{\rho}}^{m+1} dx = -\lambda\sqrt{2} \frac{(m'+1)_{n_{\rho}} \left(m+1 - \frac{m'+m+3}{2} + 1 \right)_{n_{\rho}} \Gamma\left(\frac{m'+m+3}{2}\right)}{n_{\rho}! n_{\rho}!} \times {}_3F_2\left(-n_{\rho}, \frac{m'+m+3}{2}, \frac{m'+m+3}{2} - m - 1; m'+1, \frac{m'+m+3}{2} - m - 1 - n_{\rho}; 1\right) \quad (3.179)$$

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty x^{\frac{m'+m+3}{2}-1} e^{-x} L_{n_\rho}^{m'} L_{n_\rho}^m dx = \\
 &= \frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \frac{(m'+1)_{n_\rho} \left(m - \frac{m'+m+3}{2} + 1\right)_{n_\rho} \Gamma\left(\frac{m'+m+3}{2}\right)}{n_\rho! n_\rho!} \times \\
 &= {}_3F_2\left(-n_\rho, \frac{m'+m+3}{2}, \frac{m'+m+3}{2} - m; m'+1, \frac{m'+m+3}{2} - m - n_\rho; 1\right)
 \end{aligned} \tag{3.180}$$

olarak tanımlanmıştır. Böylece Denklem (3.168)'deki ilk birinci terimin değerini,

$$\begin{aligned}
 &\int \cos\theta^{\sigma f} \cos\theta^{\sigma i} \psi_m^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_m^i \rho d\rho d\phi dz = \\
 &= \frac{\cos\theta^{\sigma f} \cos\theta^{\sigma i}}{2\pi\lambda^2} \left(\frac{n_\rho! n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m' + 1) \Gamma(n_\rho + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} (S + U + G) \Theta \lambda
 \end{aligned} \tag{3.181}$$

olarak buluruz. Bu denklemdeki ikinci terimin değerini bulalım. Bunun için bu denklemi,

$$\begin{aligned}
 &\int \sin\theta^{\sigma f} \sin\theta^{\sigma i} \psi_{m+1}^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_{m+1}^i \rho d\rho d\phi dz = \\
 &= \sin\theta^{\sigma f} \sin\theta^{\sigma i} \int \psi_{m+1}^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_{m+1}^i \rho d\rho d\phi dz
 \end{aligned} \tag{3.182}$$

şeklinde yazalım. Yukarıda yaptığımız gibi bu integrali değişkenlerine göre ayrı ayrı,

$$\begin{aligned}
 &\int \sin\theta^{\sigma f} \sin\theta^{\sigma i} \psi_{m+1}^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_{m+1}^i \rho d\rho d\phi dz = \\
 &= \sin\theta^{\sigma f} \sin\theta^{\sigma i} \left(\frac{n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m' + 2)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m + 2)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi\lambda^2} \int_0^{2\pi} e^{i(-m'-1+m+1)\phi} d\phi \times \\
 &= e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{m'+1}{2}} L_{n_\rho}^{m'+1} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{m+1}{2}} L_{n_\rho}^{m+1} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right) \rho d\rho \times \\
 &= \int_0^{L_0} \sqrt{\frac{2}{L_0}} \sin\left(\frac{n'\pi z}{L_0} + n'\pi\right) \sqrt{\frac{2}{L_0}} \sin\left(\frac{n\pi z}{L_0} + n\pi\right) dz
 \end{aligned} \tag{3.183}$$

yazalım. Bu ifade den görüldüğü gibi ϕ ve z bağlı integraller Denklem (3.172) ve Denklem (3.173) integrallerdeki gibi aynı değerleri vermektedir. Daha sonra ρ 'ya bağlı integralini x değişken üzerinden,

$$\int_0^\infty x^{\frac{m'+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m'+1}(x) \frac{\sqrt{2x}}{\lambda} \frac{d}{dx} x^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m+1}(x) \lambda^2 dx \tag{3.184}$$

yazalım. Türev işlemini,

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{m+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_{n_\rho}^{m+1} = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{m+1}{2}} \left((m+1)x^{-1} L_{n_\rho}^{m+1} - 2L_{n_\rho}^{m+2} + L_{n_\rho}^{m+1} \right). \quad (3.185)$$

gerçekleştirelim. Burada, $L_{n_\rho-1}^{m+2} = L_{n_\rho}^{m+2} - L_{n_\rho}^{m-1}$ dönüşümü yapılmıştır. Bulduğumuz bu ifadeni integralde yazarsak,

$$\frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty x^{\frac{m'+m+3}{2}} e^{-x} L_{n_\rho}^{m'+1} \left((m+1)x^{-1} L_{n_\rho}^{m'+1} - 2L_{n_\rho}^{m'+2} + L_{n_\rho}^{m'+1} \right) dx \quad (3.186)$$

elde ettiğimiz integralin değeri,

$$\int_0^\infty R_{m'+1} \frac{d}{d\rho} R_{m+1} \rho d\rho = S_1 + U_1 + G_1 \quad (3.187)$$

olarak bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\lambda\sqrt{2}(m+1)}{2} \int_0^\infty x^{\frac{m'+m+3}{2}-1} e^{-x} L_{n_\rho}^{m'+1} L_{n_\rho}^{m'+1} dx = \\ &= \frac{\lambda\sqrt{2}(m+1)}{2} \frac{(m'+2)_{n_\rho} \left(m+2 - \frac{m'+m+3}{2} \right)_{n_\rho} \Gamma\left(\frac{m'+m+3}{2}\right)}{n_\rho! n_\rho!} \times \\ &{}_3F_2\left(-n_\rho, \frac{m'+m+3}{2}, \frac{m'+m+3}{2} - m-1; m'+2, \frac{m'+m+3}{2} - m-1 - n_\rho; 1\right) \end{aligned} \quad (3.188)$$

$$\begin{aligned} U_1 &= -\frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty x^{\frac{m'+m+5}{2}-1} e^{-x} L_{n_\rho}^{m'+1} 2L_{n_\rho}^{m'+2} dx = \\ &= -\lambda\sqrt{2} \frac{(m'+2)_{n_\rho} \left(m+3 - \frac{m'+m+5}{2} \right)_{n_\rho} \Gamma\left(\frac{m'+m+5}{2}\right)}{n_\rho! n_\rho!} \times \\ &{}_3F_2\left(-n_\rho, \frac{m'+m+5}{2}, \frac{m'+m+5}{2} - m-2; m'+2, \frac{m'+m+5}{2} - m-2 - n_\rho; 1\right) \end{aligned} \quad (3.189)$$

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \int_0^\infty x^{\frac{m'+m+5}{2}-1} e^{-x} L_{n_\rho}^{m'+1} L_{n_\rho}^{m'+1} dx = \\ &= \frac{\lambda\sqrt{2}}{2} \frac{(m'+2)_{n_\rho} \left(m+2 - \frac{m'+m+5}{2} \right)_{n_\rho} \Gamma\left(\frac{m'+m+5}{2}\right)}{n_\rho! n_\rho!} \times \\ &{}_3F_2\left(-n_\rho, \frac{m'+m+5}{2}, \frac{m'+m+5}{2} - m-1; m'+2, \frac{m'+m+5}{2} - m-1 - n_\rho; 1\right) \end{aligned} \quad (3.190)$$

parametreleri tanımlanmıştır. Böylece bulduğumuz ifadeleri Denklem (3.183)'da yazarsak,

$$\int \sin \theta^{\sigma f} \sin \theta^{\sigma i} \psi_{m'+1}^{f*} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_{m'+1}^i \rho d\rho d\phi dz = \frac{\sin \theta^{\sigma f} \sin \theta^{\sigma i}}{2\pi\lambda^2} \left(\frac{n_{\rho}'! n_{\rho}!}{\Gamma(n_{\rho}' + m' + 2) \Gamma(n_{\rho} + m + 2)} \right)^{\frac{1}{2}} (S_1 + U_1 + G_1) \Theta \Lambda \quad (3.191)$$

ifadesini elde ederiz.

Yukarıda hesaplamalar sonucunda bulduğumuz Denklem (3.181) ve Denklem (3.191)'i Denklem (3.168)'da yazarsak,

$$\mathbf{ep}_{if} = -i\hbar\Theta\Lambda Y \left(\frac{S+U+G}{VV} + \frac{S_1+U_1+G_1}{W} \right) \quad (3.192)$$

bantlar içi optik geçişler için dipol momentum operatörünün değerini elde ederiz. Burada,

$$Y = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \left(\frac{n_{\rho}'! n_{\rho}!}{\Gamma(n_{\rho}' + m' + 1) \Gamma(n_{\rho} + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.193)$$

ve

$$W = \frac{\sqrt{(n_{\rho}' + m' + 1)(n_{\rho} + m + 1)}}{\sin \theta^{\sigma f} \sin \theta^{\sigma i}}, \quad (3.194)$$

$$VV = \frac{1}{\cos \theta^{\sigma f} \cos \theta^{\sigma i}} \quad (3.195)$$

parametreleri tanımlanmıştır.

Yukarıda Denklem (3.192) elde ettiğimiz ifade kuantum sistemimizin izinli ve izinsiz bantlar içi optik geçişler için seçim kuralını belirler. Denklem (3.172)-(3.173) ifadelerdeki n, n', m, m' kuantum sayılarının birbirlerine göre alabileceği değerlerinin tüm kombinasyonlarının sıfırdan farklı olması, bize izinli optik geçişleri verir. Denklem (3.172)'ye baktığımızda optik geçiş olması için $m = m'$ olması gerekiyor. Denklem (3.173)'den ise $n = n'$ olduğu durumda optik geçişler gerçekleşir. Denklem (3.178)-(3.180) ve Denklem

(3.188)-(3.190)'den ise n_ρ, n_ρ' bir-birlerine göre alabileceği değerlerinin tüm kombinasyonlarında optik geçişler gerçekleşmektedir. Yukarıda yazdıklarımızdan şu sonuçları elde edebiliriz: Kuantum sistemimizdeki bantlar içi optik geçişler sadece aynı m kuantum sayılı durumlar arasında gerçekleşmektedir; Elipsoid kuantum noktanın z yöndeki elektron enerji durumları n kuantum sayısı ile belirlenmektedir. İzinli optik geçişler aynı n kuantum sayılı durumlar arasında gerçekleşmektedir. Böylece izinli optik geçişlerimiz için $n_\rho nm \rightarrow n_\rho' n' m'$ ifadesini tanımlayabiliriz.

Optik geçiş gerçekleşmeden önceki elektronun enerji durumunu E_σ^i ve gerçekleştikten sonraki enerji durumunu ise E_σ^f olarak tanımlayalım. Sonra, Denklem 'deki Dirac delta fonksiyonun argümanını, tanımladığımız enerji durumlarını dikkate alarak,

$$\Delta E_\sigma = E_\sigma^f - E_\sigma^i - \hbar\omega \quad (3.196)$$

şeklinde yazalım. Burada E_σ^f optik geçiş sonucunda elektronun enerjisi ve E_σ^i optik geçişten önceki enerjisi. E_σ^i açılımı şu şekildedir:

$$E_\sigma^i = \frac{E_m^i + E_{m+1}^i - \sigma\sqrt{C^i}}{2}; \quad (3.197)$$

$$C^i = (E_m^i - E_{m+1}^i + g^* B\mu_B)^2 + 4\frac{\alpha_R^2}{\tau_1^i \tau_2^i} \left(m\kappa^i + \nu_2^i + \frac{eB}{2\hbar} \eta^i \right) \left((m+1)\kappa^i - \nu_1^i + \frac{eB}{2\hbar} \eta^i \right); \quad (3.198)$$

$$E_m^i = \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma^2 - \frac{\hbar\omega_c m}{2} + \hbar\Omega \left(n_\rho + \frac{m+1}{2} \right); \quad (3.199)$$

$$E_{m+1}^i = \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma^2 - \frac{\hbar\omega_c (m+1)}{2} + \hbar\Omega \left(n_\rho + \frac{m+2}{2} \right); \quad (3.200)$$

$$\tau_1^i = \lambda^2 \frac{\Gamma(m + n_\rho + 1)}{n_\rho!}; \quad (3.201)$$

$$\tau_2^f = \lambda^2 \frac{\Gamma(m + n_\rho' + 2)}{n_\rho'!}; \quad (3.202)$$

$$\tau_2^i = \lambda^2 \frac{\Gamma(m + n_\rho + 2)}{n_\rho!}; \quad (3.203)$$

$$\begin{aligned} \nu_i^j &= \frac{\lambda(m+1)}{\sqrt{2}} \frac{(m+1)_{n_\rho}}{n_\rho!} \Gamma(m+1) + \\ & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \frac{(m+2)_{n_\rho} (-1)_{n_\rho}}{(n_\rho!)^2} \Gamma(m+2) {}_3F_2(-n_\rho, m+2, 2; m+2, 2-n_\rho; 1) - ; \\ & \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} \frac{(m+1)_{n_\rho}}{n_\rho!} \Gamma(m+2) \end{aligned} \quad (3.204)$$

$$\begin{aligned} \nu_i^j &= \frac{\lambda m}{\sqrt{2}} \frac{(m+1)_{n_\rho}}{n_\rho!} \Gamma(m+1) - \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(m+n_\rho+2)}{n_\rho!} + \\ & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \frac{(m+2)_{n_\rho} (-1)_{n_\rho}}{(n_\rho!)^2} \Gamma(m+2) {}_3F_2(-n_\rho, m+2, 2; m+2, 2-n_\rho; 1) \quad ; \\ & \end{aligned} \quad (3.205)$$

$$\kappa^i = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \frac{(1+m)_{n_\rho}}{n_\rho!} \Gamma(m+1); \quad (3.206)$$

$$\eta^i = \lambda^3 \sqrt{2} \frac{(m+2)_{n_\rho} (-1)_{n_\rho}}{(n_\rho!)^2} {}_3F_2(-n_\rho, m+2, 2; m+2, 1-n_\rho; 1). \quad (3.207)$$

İzinli optik geçişler $m = m'$ ve $n = n'$ olarak gerçekleştiğini dikkate alarak E_σ^f 'in açılımı ise şu şekilde olur:

$$E_\sigma^f = \frac{E_m^f + E_{m+1}^f - \sigma \sqrt{C^f}}{2}; \quad (3.208)$$

$$\begin{aligned} C^f &= (E_m^f - E_{m+1}^f + g^* B \mu_B)^2 + \\ & 4 \frac{\alpha_R^2}{\tau_1^f \tau_2^f} \left(m \kappa^f + \nu_2^f + \frac{eB}{2\hbar} \eta^f \right) \left((m+1) \kappa^f - \nu_1^f + \frac{eB}{2\hbar} \eta^f \right); \end{aligned} \quad (3.209)$$

$$E_m^f = \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma^2 - \frac{\hbar \omega_c m}{2} + \hbar \Omega \left(n_\rho ' + \frac{m+1}{2} \right); \quad (3.210)$$

$$E_{m+1}^f = \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma^2 - \frac{\hbar \omega_c (m+1)}{2} + \hbar \Omega \left(n_\rho ' + \frac{m+2}{2} \right); \quad (3.211)$$

$$\tau_1^f = \lambda^2 \frac{\Gamma(m+n_\rho '+1)}{n_\rho '!}; \quad (3.212)$$

$$\tau_2^f = \lambda^2 \frac{\Gamma(m + n_{\rho'} + 2)}{n_{\rho'}!}; \quad (3.213)$$

$$\begin{aligned} v_1^f &= \frac{\lambda(m+1)(m+1)_{n_{\rho'}}}{\sqrt{2} n_{\rho'}!} \Gamma(m+1) + \\ &\frac{\lambda(m+2)_{n_{\rho'}}(-1)_{n_{\rho'}} \Gamma(m+2)}{\sqrt{2} (n_{\rho'}!)^2} {}_3F_2(-n_{\rho'}, m+2, 2; m+2, 2-n_{\rho'}; 1) -; \end{aligned} \quad (3.214)$$

$$\frac{2\lambda(m+1)_{n_{\rho'}}}{\sqrt{2} n_{\rho'}!} \Gamma(m+2)$$

$$\begin{aligned} v_2^f &= \frac{\lambda(m+2)_{n_{\rho'}}(-1)_{n_{\rho'}} \Gamma(m+2)}{\sqrt{2} (n_{\rho'}!)^2} {}_3F_2(-n_{\rho'}, m+2, 2; m+2, 2-n_{\rho'}; 1) + \\ &\frac{\lambda m(m+1)_{n_{\rho'}} \Gamma(m+1)}{\sqrt{2} n_{\rho'}!} - \frac{2\lambda \Gamma(m+n_{\rho'}+2)}{\sqrt{2} n_{\rho'}!} \end{aligned}; \quad (3.215)$$

$$\kappa^f = \frac{\lambda(1+m)_{n_{\rho'}}}{\sqrt{2} n_{\rho'}!} \Gamma(m+1); \quad (3.216)$$

$$\eta^f = \lambda^3 \sqrt{2} \frac{(m+2)_{n_{\rho'}}(-1)_{n_{\rho'}} \Gamma(m+2)}{(n_{\rho'}!)^2} {}_3F_2(-n_{\rho'}, m+2, 2; m+2, 1-n_{\rho'}; 1). \quad (3.217)$$

Daha sonra,

$$\delta(x) \approx \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{x^2 + \Gamma^2} \quad (3.218)$$

olduğunu dikkate alarak (Vorobyev vd. 2001), Denklem (3.152)'deki Dirac delta fonksiyonumuzu

$$\delta(\Delta E_{\sigma}) \approx \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{\Delta E_{\sigma}^2 + \Gamma^2}. \quad (3.219)$$

Burada, Γ optik geçiş sonrasında sistemin tekrar termodinamik dengeye ulaşmaya gerekli olan zamanı ifade eden ve s^{-1} biriminde olan sabittir.

Yukarı elde ettiğimiz ifadeleri Denklem 'de yazarsak bantlar içi optik geçişler için,

$$\alpha(\hbar\omega) = \frac{4\pi e^2 \hbar^3}{\varepsilon_0 c n_0 \mu_0^2 \hbar \omega V} (\Theta \Delta Y)^2 \times \left(\frac{S+U+G}{VV} + \frac{S_1+U_1+G_1}{W} \right)^2 \frac{\Gamma}{\Delta E_\sigma^2 + \Gamma^2} (f(E_\sigma^i) - f(E_\sigma^f)) \quad (3.220)$$

şeklinde soğurma katsayı ifadesini yazabiliriz. Burada $f(E_\sigma^i)$ ve $f(E_\sigma^f)$ optik geçişten önceki ve sonraki durumları için Fermi-Dirac dağılımlarıdır.

4. BULGULAR

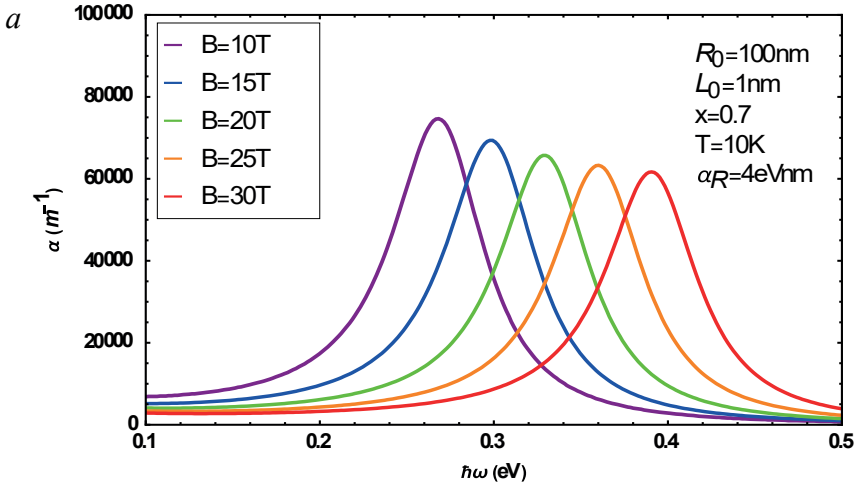
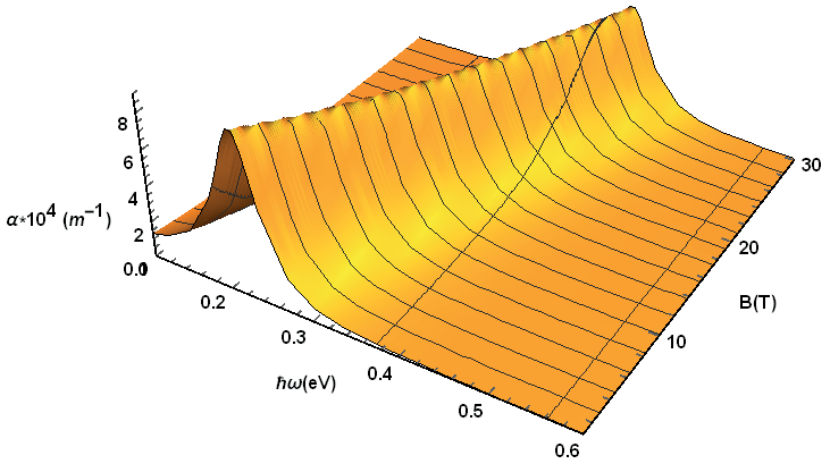
4.1. Hesaplamalarda Kullanılan Değerler

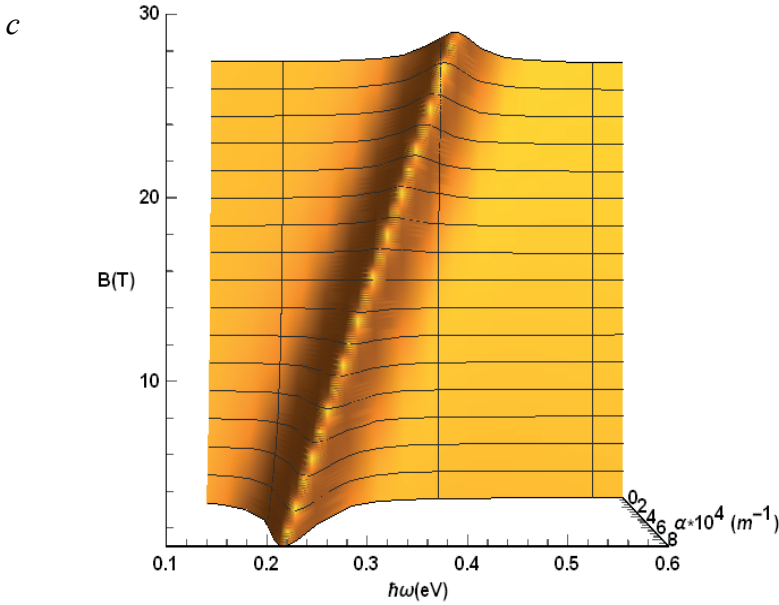
Bir önceki bölümde elde ettiğimiz sonuçlara göre elipsoid kuantum noktada izinli bantlar içi optik geçişler belirli koşullara göre gerçekleşmektedir. Yani, optik geçişler aynı m ve n kuantum sayılı enerji seviyeler arasında gerçekleştiği sonucuna varılmıştır. Ayrıca, n_ρ sayısını göre optik geçişler $n_\rho = 0, 1, \dots$ şeklinde alabileceği tüm değerlere göre gerçekleştiği görülmektedir.

Tezimizin bu bölümünde yukarıda bantlar içi optik geçişler için elde ettiğimiz Denklem (3.220)'deki soğurma katsayısının gelen foton enerjisinin fonksiyonu olarak manyetik alan, sıcaklık gibi dış parametrelere göre ve Rashba sabiti, x konsantrasyonu, elipsoidin L_0 kalınlığı ve R_0 yarıçapı gibi parametrelerine göre değişimleri araştırılmaktadır. Ayrıca soğurma katsayısının n_ρ kuantum sayısına göre farklı bantlar içi optik geçişlerinde davranışı incelenecektir. Bundan başkade $\alpha = 0$ durumunda elipsoid kuantum noktanın bantlar arası optik geçişinin sıcaklık, manyetik alan gibi yukarıda bahsettiğimiz parametrelerine göre nasıl değiştiği araştırılmaktadır. Hesaplamalarda: $\tau N_0 = 0.22eV$ (Furdyna, 1988); $\mu_e = 0.096\mu_0$ (Harper vd. 1989); $g_e = -1.04$ (Sirenko vd. 1997); $n_0 = 3.0172$ (Ilchuk vd. 2020); $\Gamma = 0.02eV$ değerleri kullanılmıştır. Grafikler Wolfram Mathematica programı kullanılarak elde edilmiştir. Hesaplamalarımız, (nmn_ρ) olmak üzere $(110) \rightarrow (111)$ optik geçişine göre yapılmaktadır. Ayrıca tüm hesaplamalar $Cd_{1-x}Mn_xTe$ yapısı için gerçekleştirilmektedir (Babanlı vd. 2023).

4.2. Bantlar İçi Optik Geçişler İçin Bulgular

İlk olarak elipsoid kuantum noktada manyetik alanın değişiminin nasıl etki ettiğini inceleyelim. Manyetik alan vektörü artı z yönünde olduğunu kabul edelim. Manyetik alanın etkisi elipsoid içerisinde bulunan elektronun enerjisini spin yönüne göre ikiye ayırılır. Ayrıca, Denklem (3.131)'de elektronun enerjisi Rashba spin-yörünge etkileşiminin sonucu olarak ikiye ayırılır.

*b*

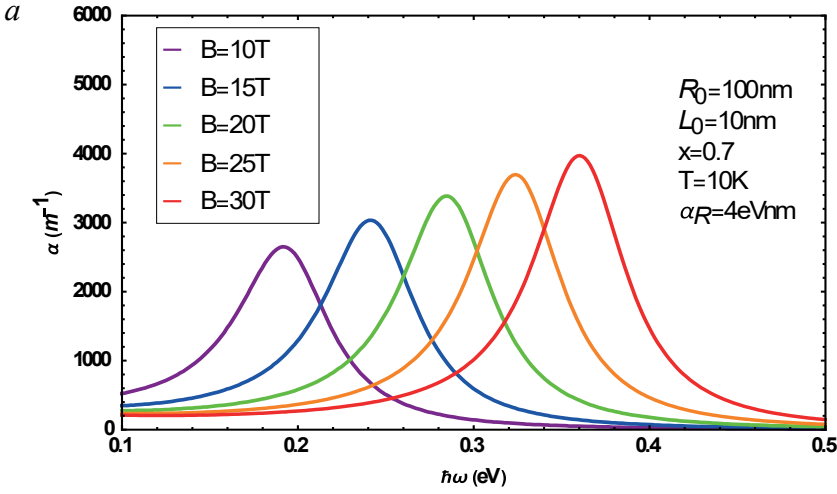


Şekil 4.1. Soğurma katsayısının gelen foton enerjisinin fonksiyonu olarak manyetik alanın farklı değerlerine göre grafiği.

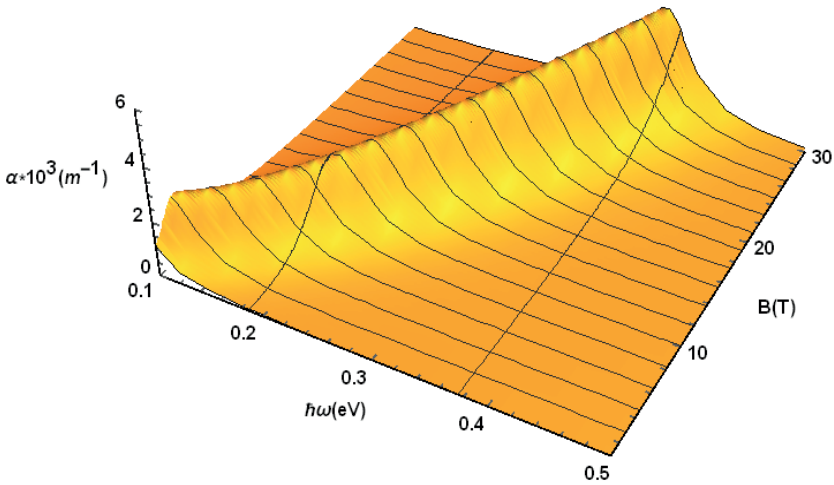
Şekil 4.1’de elipsoidin merkez kalınlığı $L_0 = 1nm$ iken manyetik alanın farklı değerlerine göre soğurma katsayısının değişimi gösterilmiştir. Şekil 4.1’de, manyetik alanın artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu azalmakta ve ışığın dalga boyu mavi renge doğru kaymaktadır. Yani, manyetik alanın artmasıyla optik geçişler azalmakta, geçişler ışığın daha küçük dalga boylarında gerçekleşmektedir. Şekil 4.1b ve Şekil 4.1c’de soğurma katsayısının maksimumunun gelen fotonun enerjisine ve manyetik alana göre değişimin üç boyutlu grafiği gösterilmiştir. Soğurma katsayısının maksimumu manyetik alan arttıkça gelen foton enerjisine göre sağa kaydığı görülmektedir. Ayrıca bu kayma manyetik alan ve foton enerjisi değişimi açısından lineerdir.

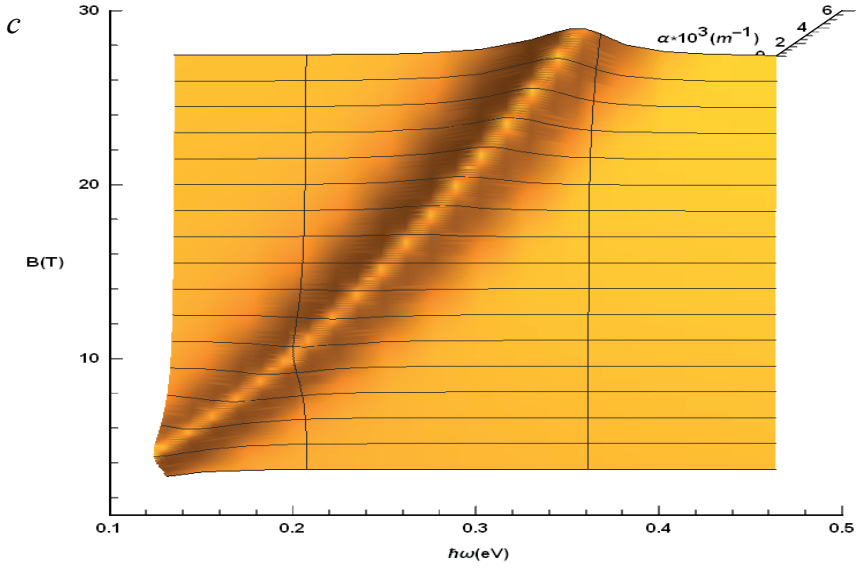
Eğer L_0 parametresi artarsa, Şekil 4.2’de görüldüğü gibi soğurma katsayısının maksimumu manyetik alanın artmasıyla artmakta, ışığın dalga boyu mavi renge doğru ve grafik sağa doğru kaymaktadır. Ayrıca $L_0 = 1nm$ iken soğurma katsayısının maksimum değeri $L_0 = 10nm$ iken maksimum değerine göre çok büyük olduğu görülmektedir. Şekil 4.2b’de ve şekil 4.2c’de elipsoid kalınlığının $L_0 = 10nm$ değerinde soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisine ve manyetik alana göre değişiminin grafiği verilmiştir. Şekil 4.2c’den manyetik alanın artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu maviye kayması manyetik alan ve gelen foton enerjisi açısından Şekil 4.1c’e göre lineer olmayan bir şekilde değişmektedir.

Şekil 4.3'de lensin kalınlığı arttıkça, soğurma katsayısının maksimum değerinin azaldığı ve enerjinin sola doğru kaydığı görülmektedir. Ayrıca, L_0 'in artmasıyla soğurma maksimumu azalmakta, ışığın dalga boyu kırmızı renge doğru kaymaktadır. Uyarılma daha büyük dalga boylarında gerçekleşmektedir. Şekil 4.3b'de ve şekil 4.3c'de soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisine ve elipsoidin kalınlığına göre değişiminin grafiği verilmiştir. Gelen foton enerjisi ve elipsoid kalınlığı açısından bakıldığında L_0 'in düşük değerlerinde gelen foton enerjisine göre lineer olmayan şekilde ve L_0 arttıkça gelen foton enerjisinden bağımsız olduğu görülmektedir (Şekil 4.3b, Şekil 4.3c).

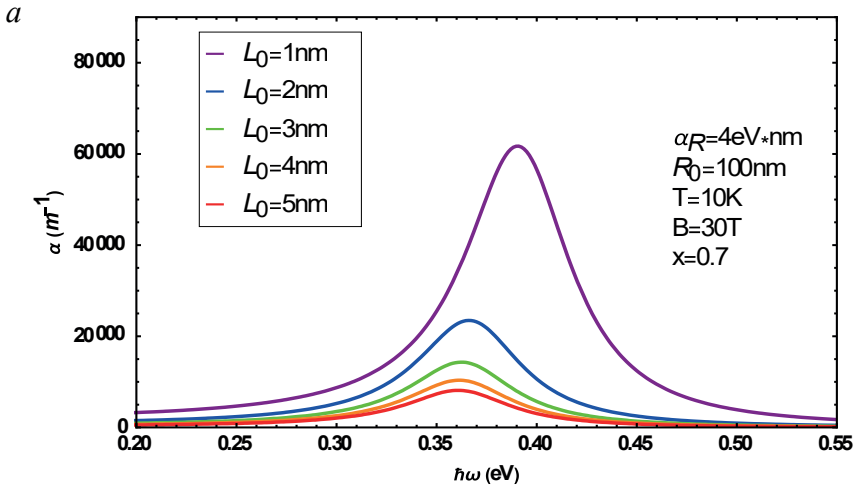


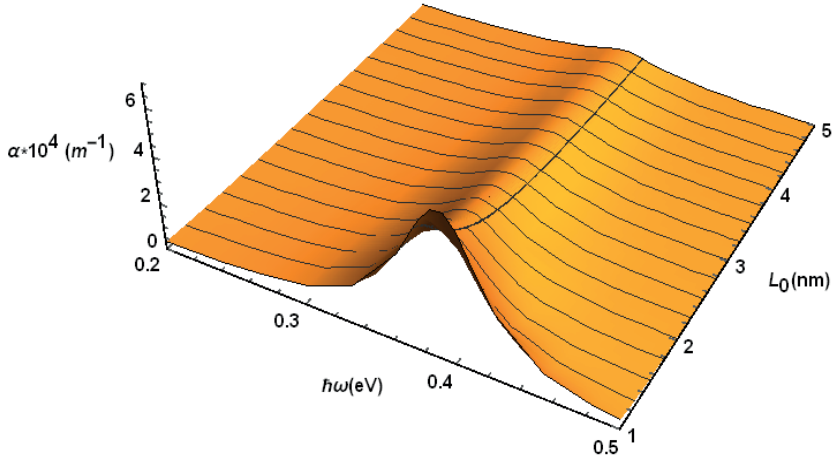
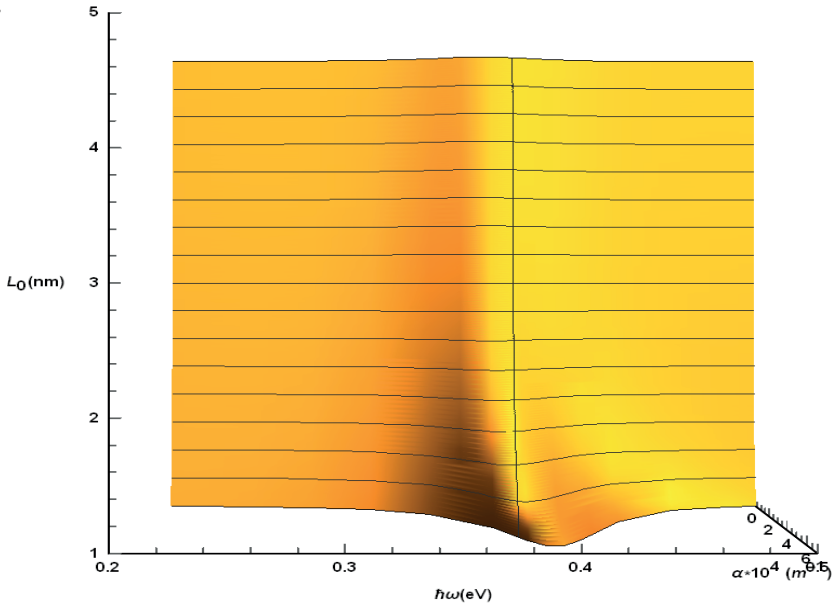
b



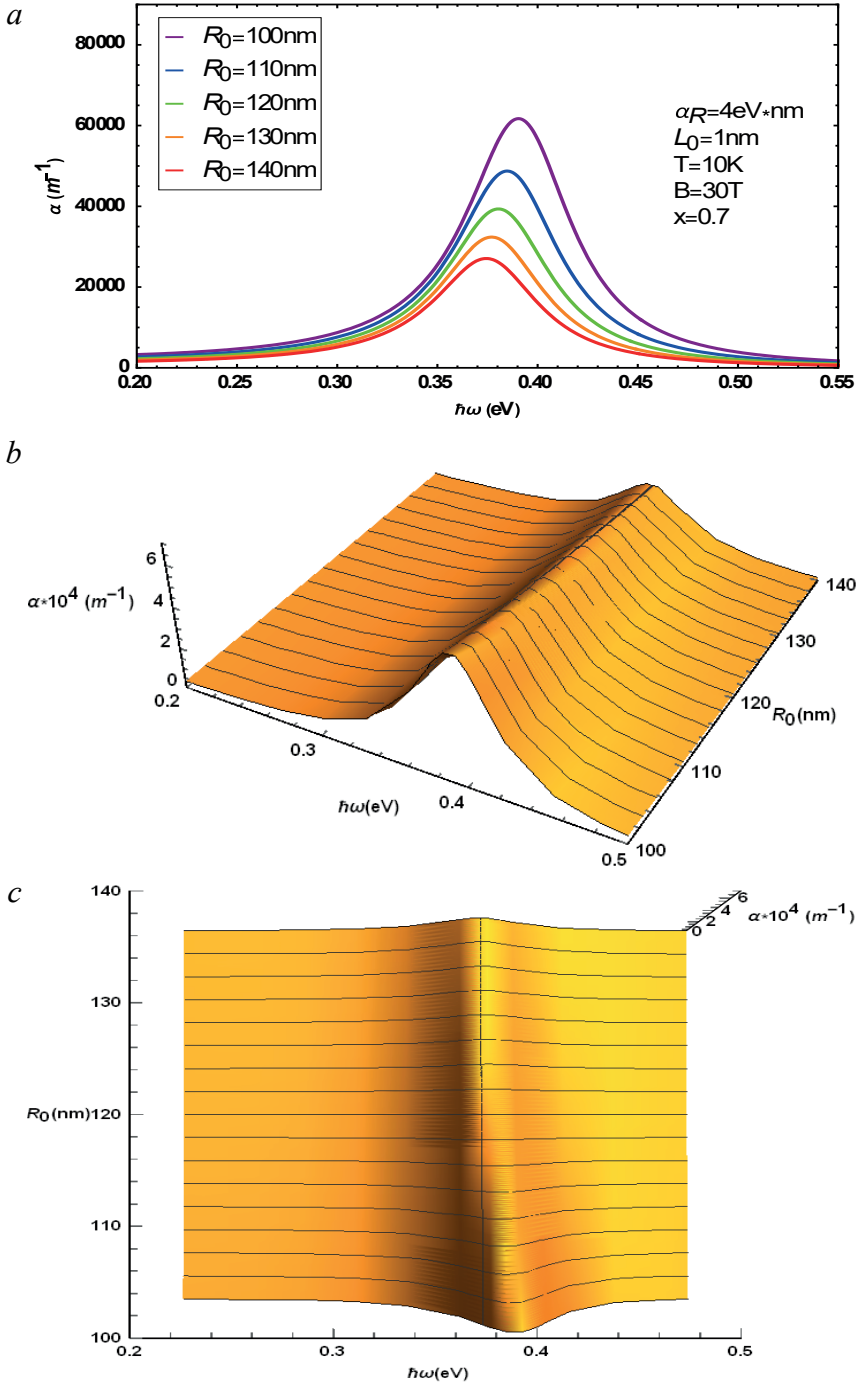


Şekil 4.2. Bu grafikte $L_0 = 10 \text{ nm}$ iken soğurma katsayısının maksimumu manyetik alanın artmasıyla arttığı görülmektedir.



b*c*

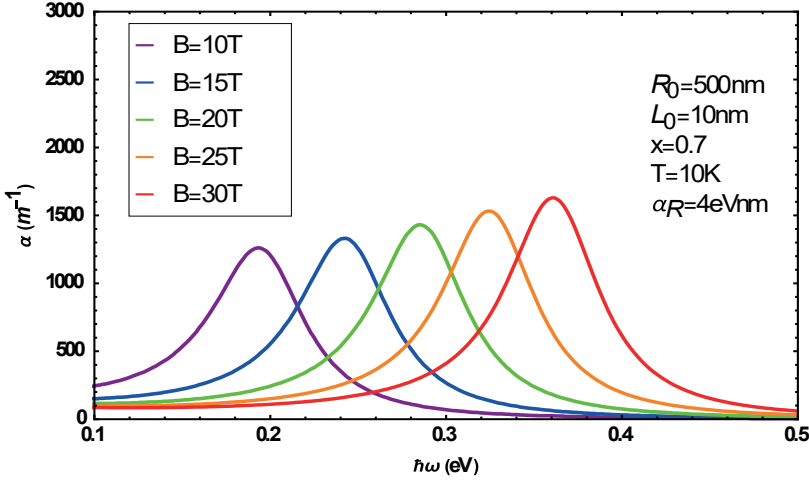
Şekil 4.3. Farklı L_0 parametrelerine göre soğurma katsayısının grafiği



Şekil 4.4. Bu grafikte elipsoidin XOY düzlemindeki R_0 yarıçapının farklı değerlerine göre soğurma katsayısının grafiği.

Şekil 4.4'te elipsoidin R_0 yarıçapının artması sonucunda, soğurma katsayısının maksimum değerinin azaldığı ve sola doğru kaydığı görülmektedir. Yani, R_0 'ın artmasıyla uyarılma daha büyük dalga boylarında gerçekleşmekte ve fotonun dalga boyu kırmızıya kaymaktadır (Şekil 4.4). Şekil 4.4b'de ve şekil 4.4c'de soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisine ve elipsoidin yarıçapına göre değişimin grafiği verilmiştir. Şekil 4.3c'deki sonuçların aksine R_0 'ın gelen foton enerjisinden bağımsız olduğu görülmekte (Şekil 4.4c).

Şekil 4.5'te görüldüğü gibi elipsoidin yarıçapı $R_0 = 500\text{nm}$ olduğunda, soğurma katsayısının maksimumu manyetik alanın artmasıyla artmakta ve grafik sağa doğru kaymaktadır. Yani, R_0 yarıçapında manyetik alanın artmasıyla uyarılma daha fotonun küçük dalga boylarında gerçekleşmekte ve fotonun enerjisi maviye doğru kaymaktadır. Ayrıca soğurma katsayısının maksimum değeri Şekil 4.4' e göre oldukça düşüktür (Şekil 4.5).



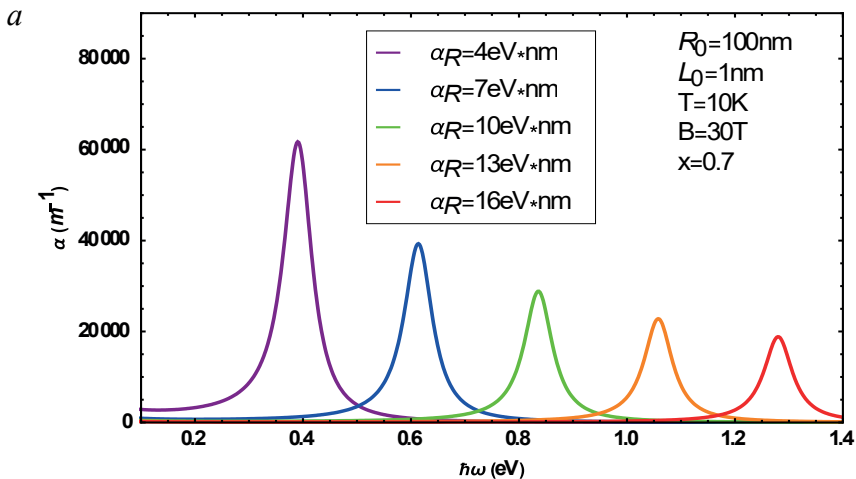
Şekil 4.5. $R_0 = 500\text{nm}$ iken soğurma katsayısının farklı manyetik alan değerlerine göre grafiği.

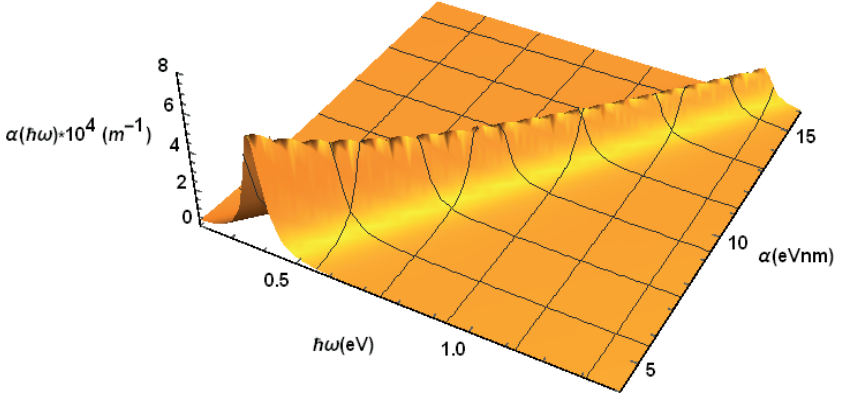
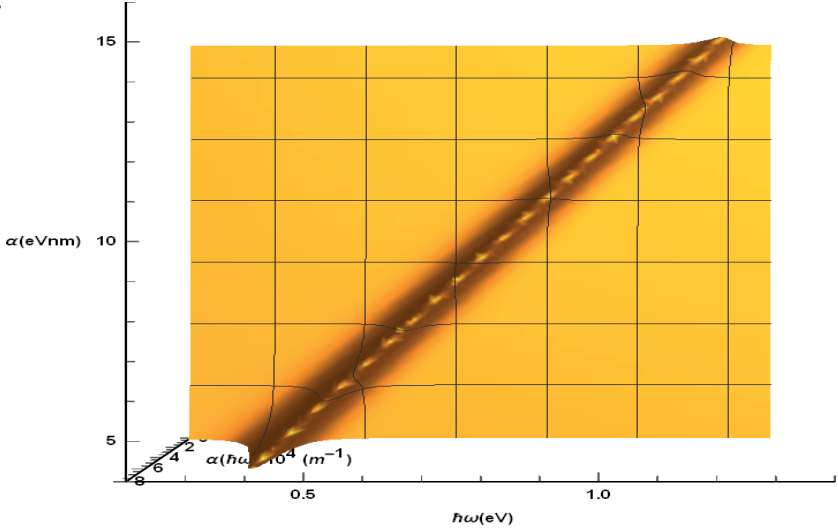
Şimdi ise Rashba parametresinin soğurma katsayısına olan etkisini inceleyelim. Şekil 4.6'da Rashba parametresinin 5 farklı değerine göre soğurma katsayısının değişimi gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi Rashba parametresinin artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu azalmakta ve fotonun enerjisi maviye kaymaktadır. Rashba parametresinin artması sonucunda elektronun enerji seviyeleri arasındaki mesafe artmaktadır. Enerji seviyeleri arasındaki mesafenin artması, elektronun ilk enerji durumundan son enerji durumuna optik geçiş yapma olasılığının düştüğü anlamına gelir. Ayrıca enerji seviyelerinin arasındaki mesafenin artması, elektronun optik geçiş yapması için

gerekli olan foton enerjisinin de artması demektir. Bu durum Şekil 4.6’da Rashba parametrenin $\alpha_R = 4nm eV$ değerinde $\hbar\omega = 0.39eV$ foton enerjisinde soğurma katsayısının maksimumu yaklaşık $\alpha(\hbar\omega) = 6.2 \cdot 10^4 m^{-1}$ ’e denk gelmektedir. Rashba parametresinin daha büyük değerinde $\alpha_R = 16nm eV$, foton enerjisinin $\hbar\omega = 1.28eV$ değerinde, soğurma maksimumu $\alpha(\hbar\omega) = 2 \cdot 10^4 m^{-1}$ ’e denk gelmektedir. Böylece Rashba parametresinin 12 birim artması elektronun $110 \rightarrow 111$ enerji seviyeleri arasındaki optik geçişi soğurma maksimumunu yaklaşık $4 \cdot 10^4$ birim düşmektedir. Şekil 4.6b’de ve şekil 4.6c’de soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisine ve Rashba parametresine göre grafiği verilmiştir. Ayrıca Rashba parametrenin ve gelen foton enerjisine göre değişimi lineer olduğu görülmektedir (Şekil 4.6c).

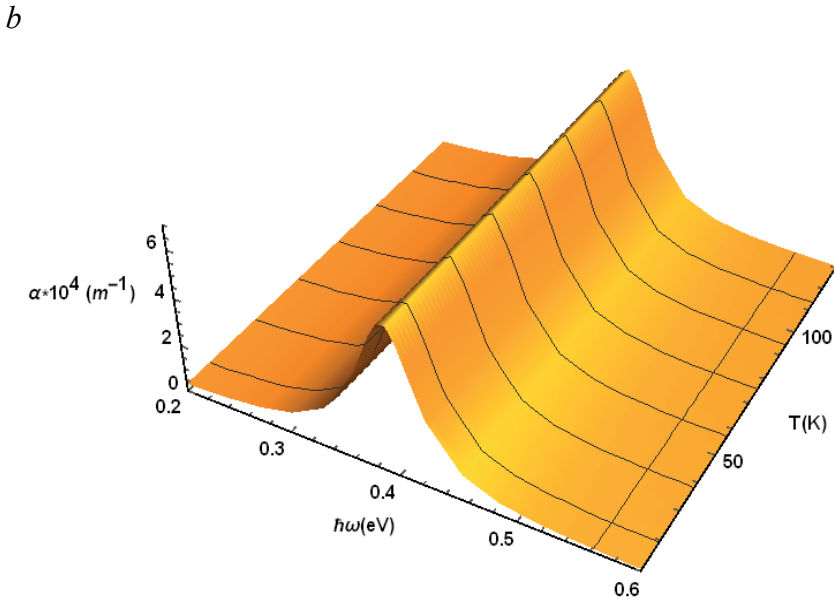
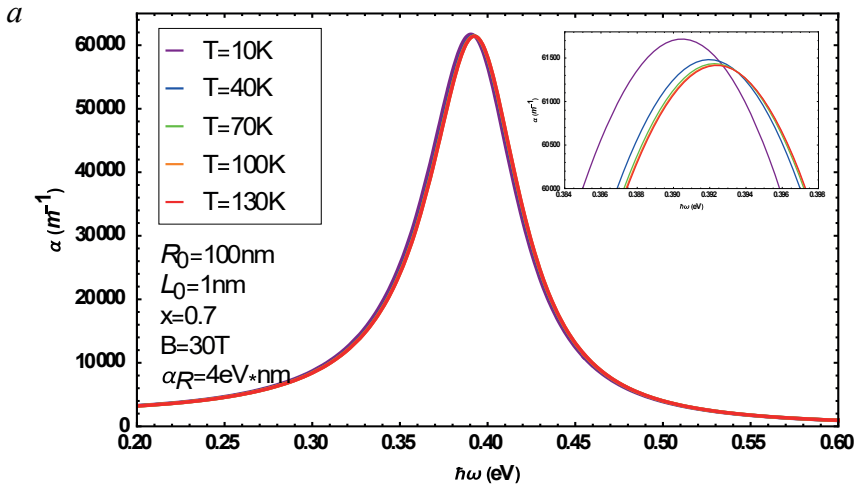
Soğurma katsayısını etkileyecek olan diğer bir faktör sıcaklık ve x , ($Cd_{1-x}Mn_xTe$) konsantrasyonudur. Bu parametreler $Cd_{1-x}Mn_xTe$ seyreltilmiş yarımanyetik yarıiletken (DMS) teriminde yer almaktadır. Çalışmamızda, Mn katkılı $Cd_{1-x}Mn_xTe$ seyreltilmiş yarımanyetik yarıiletken kuantum sistemi ele alınmıştır. Böyle bir DMS yapı, x parametresi ile belirli bir oranda Mn atomunu ifade eder. Bu yapılarda x parametresinin artması veya azalması yapının manyetik özelliklerini değiştirmektedir. Ayrıca böyle yapılar, Denklem ’den gördüğümüz gibi sıcaklığa da bağlı olmaktadır.

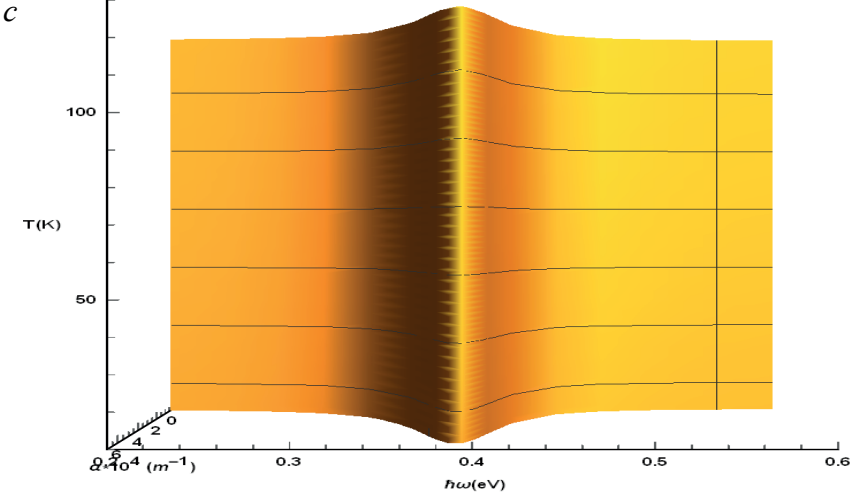
Sıcaklığın farklı değerlerinin soğurma katsayısına etkisi Şekil 4.7’de görülmektedir. Şekilde görüldüğü gibi sıcaklığın değişimi soğurma katsayısının maksimumunu çok etkilememektedir. Sıcaklığın artmasıyla soğurma maksimumu azalmakta ve grafik sağa kaymaktadır. Böylece fotonun enerjisinin maviye kaydığı görülmektedir. Ayrıca şekil 4.7b’de ve şekil 4.7c’de soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisi ve sıcaklığa göre değişimin grafiği verilmiştir.



b*c*

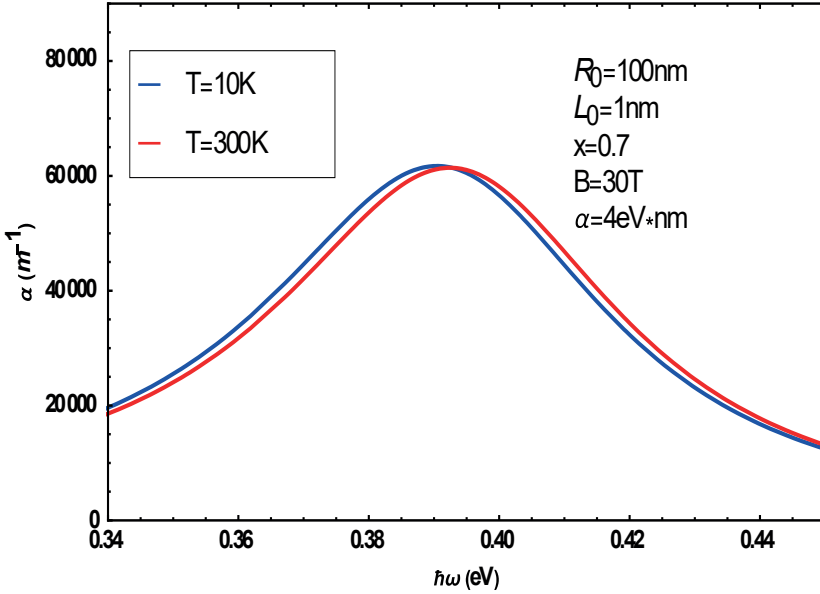
Şekil 4.6. Bu şekilde farklı Rashba parametrelerine göre soğurma katsayısının grafiği gösterilmiştir.



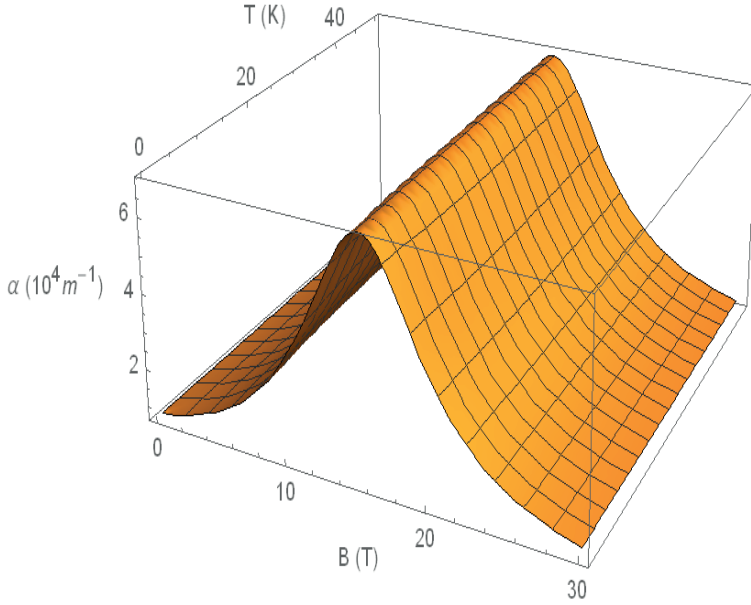


Şekil 4.7. Sıcaklığın farklı değerlerine göre soğurma katsayısının değişim grafiği.

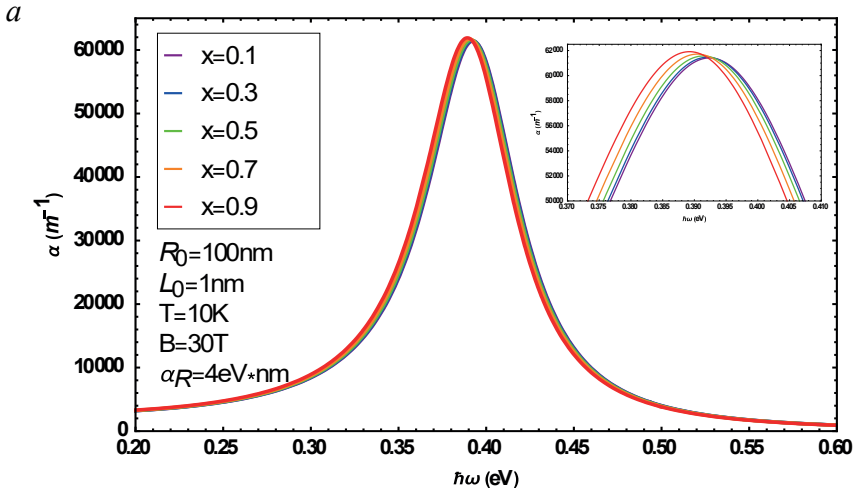
Şekil 4.8’de sıcaklığın $T = 10K$ ve $T = 300K$ iki farklı değerlerinde soğurma katsayısının maksimumunun çok değişmediği açıkça görülmektedir. Yani, sıcaklık arttıkça soğurma maksimumu sağa doğru kaydığı görülmektedir.



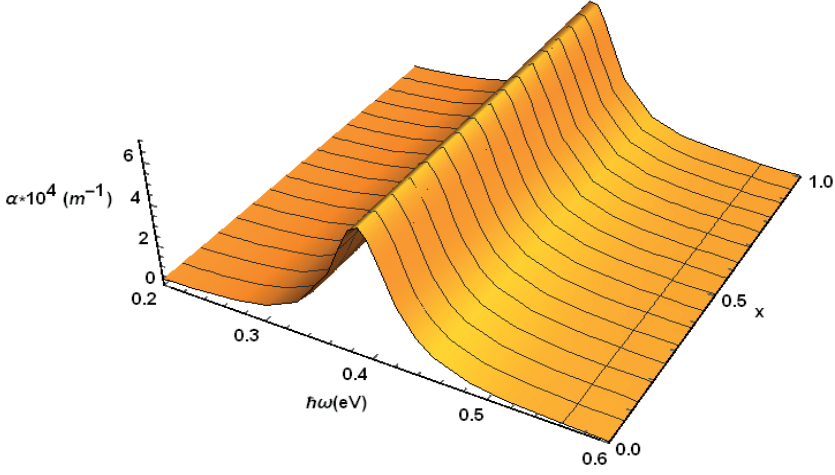
Şekil 4.8. Sıcaklıklar arası çok büyük olan bir durumda soğurma katsayısının grafiği.



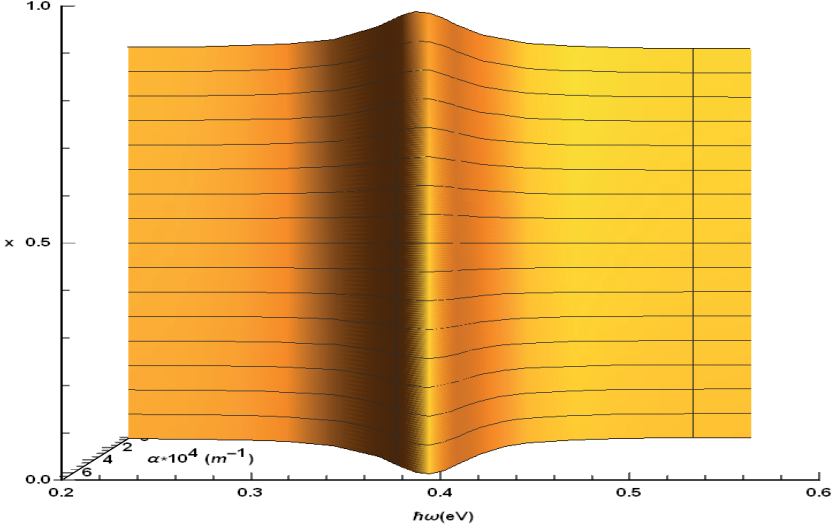
Şekil 4.9. Soğurma katsayısının, gelen foton enerjisinin $\hbar\omega = 0.3\text{eV}$ değerinde, manyetik alan ve sıcaklık parametrelerine göre fonksiyonu.



b



c



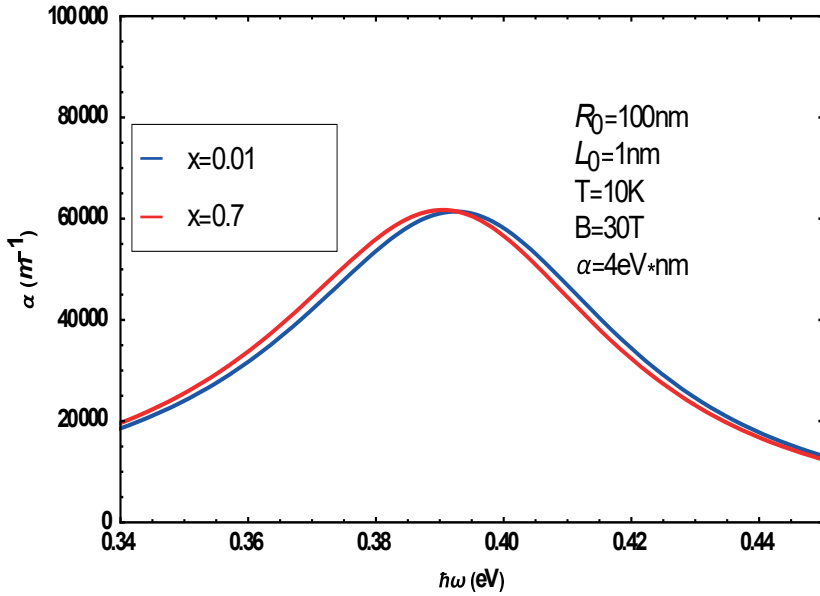
Şekil 4.10. Soğurma katsayısının x konsantrasyonuna göre değişimi.

Şekil 4.9’da foton enerjisinin $\hbar\omega = 0.3 \text{ eV}$ değerinde sabit olduğu bunun yanı sıra sıcaklık ve manyetik alanın değişimi ile soğurma katsayısının maksimum değerinin değişmediği görülmektedir. Böylece uyarma enerjisi sabit olduğunda soğurma katsayısının maksimum değerinin sıcaklık ve manyetik alandan bağımsız olduğu anlaşılmaktadır.

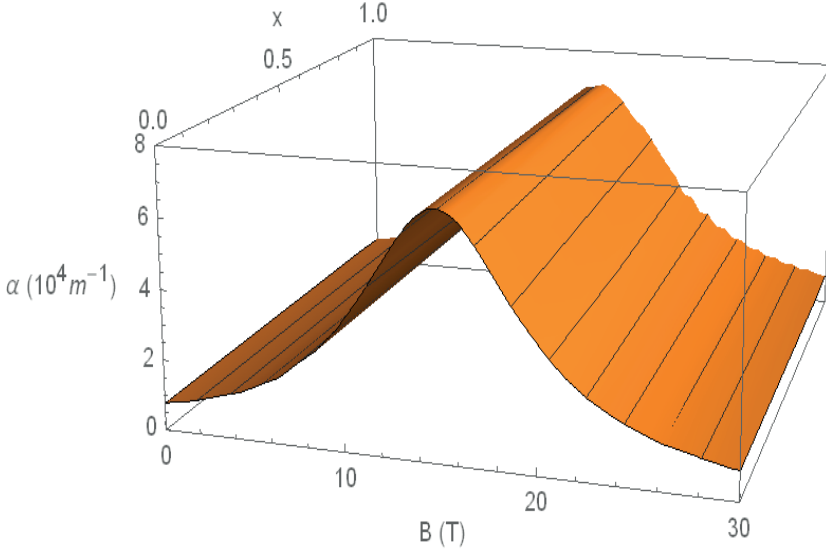
Aynı davranış x konsantrasyonunun değişiminde de görülmektedir Şekil 4.10, Şekil 4.11’de Mn atomunun konsantrasyon oranının artması soğurma katsayısının maksimumunu çok az etkilemektedir. Şekil 4.10’dan gördüğümüz gibi Mn atomunun konsantrasyonunun artmasıyla soğurma katsayısının

maksimumu artmakta, grafik sola doğru kaymaktadır. Ayrıca şekil 4.10b'de ve şekil 4.10c'de soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisi ve x 'e göre değişimin grafiği verilmiştir.

Şekil 4.12'de ise foton enerjisinin $\hbar\omega = 0.3eV$ değerinde sabit olduğu bunun yanı sıra x konsantrasyonu ve manyetik alanın değişimi ile soğurma katsayısının maksimum değerinin değişmediği görülmektedir. Böylece uyarma enerjisi sabit olduğunda soğurma katsayısının maksimum değerinin x konsantrasyonu ve manyetik alandan bağımsız olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 4.11. İki farklı Mn konsantrasyon değerleri arasındaki farkın çok büyük olduğu durumda soğurma katsayısının grafiği.



Şekil 4.12. Soğurma katsayısının X ve manyetik alan parametrelerine göre grafiği.

4.3. Rashba Parametresinin Sıfır Durumunda Bantlar Arası Optik Geçişler

Bölümün bu kısmında elipsoid kuantum noktanın bantlar arası optik geçişleri, Rashba parametresinin $\alpha_R = 0$ olduğu durum göz önüne alınarak incelenecektir. (Babanlı vd. 2023). Bantlar arası optik geçişlerde Şekil 3.9'den görüldüğü gibi elektron valans bandından iletkenlik bandına geçiş yapmaktadır. Ayrıca, optik geçişin gerçekleşmesi için elektronun yasak bant enerji aralığı kadar enerjili soğurması gerekmektedir.

Rashba parametresi sıfır durumunda Denklem

$$\begin{pmatrix} H_0 + \frac{1}{2}\mu_B Bg^* & 0 \\ 0 & H_0 - \frac{1}{2}\mu_B Bg^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1\psi_m \\ C_2\psi_{m+1} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} C_1\psi_m \\ C_2\psi_{m+1} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde yazabiliriz. Daha sonra, bu ifade,

$$\left(H_0 + \frac{1}{2}\mu_B Bg^* \right) C_1\psi_m = EC_1\psi_m, \quad (4.2)$$

$$\left(H_0 - \frac{1}{2}\mu_B Bg^* \right) C_2\psi_{m+1} = EC_2\psi_{m+1} \quad (4.3)$$

şeklinde yazılır. Burada, bu iki denklemin birbirinden sadece $\sigma = \pm 1$ şeklinde tanımladığı işarete göre farklı olduğu görülmektedir. Bunu dikkate alarak bu denklemler,

$$\left(H_0 + \sigma \frac{1}{2} \mu_B B g^* \right) \psi = E \psi \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerin tam çözümü Denklem 'de bulunmuştu. Burada, ψ dalga fonksiyonu,

$$\psi(\rho, \phi, z) = \frac{e^{im\phi}}{\lambda \sqrt{2\pi}} \left(\frac{n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right)^{\frac{m}{2}} \times L_{n_\rho}^m \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda^2} \right) \sqrt{\frac{2}{L(\rho)}} \sin \left(\frac{n\pi z}{L(\rho)} + n\pi \right) \quad (4.5)$$

ve E enerji spektrumu,

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma^2 - \frac{\hbar \omega_c m}{2} + \hbar \Omega \left(n_\rho + \frac{m+1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sigma g^* \mu_B B \quad (4.6)$$

olarak bulunmuştu. Kuantum sisteminde $\alpha = 0$ iken dalga fonksiyonu ve enerji spektrumu bulunduktan sonra, bantlar arası optik geçişler için soğurma katsayısını elde etmeye çalışalım. İlk önce soğurma katsayısındaki momentum operatörünü içeren ifadenin bantlar arası durumu için değerini bulmaya çalışalım. Bunun için, Denklem (3.159)'de birinci terimi göz önüne alalım. Bu denklemde ikinci terim sıfır olacaktır. Çünkü, $n_f \neq n_i$ farklı olduğu için $\delta_{n_f, n_i} = 0$ olacaktır. Bu ifadenin birinci terimi,

$$\mathbf{e} \mathbf{p}_{vc} = \langle u_c | \mathbf{e} \mathbf{p} | u_v \rangle \int_V \psi_f^{e*} \psi_i^h d\mathbf{r} \quad (4.7)$$

şeklinde yazılır. Burada, ψ_f^e ve ψ_i^h sırasıyla elektronun ve holün dalga fonksiyonlarını, $i = (n_\rho', m', n')$ ve $f = (n_\rho, m, n)$ sırasıyla elektron ve holün kuantum sayılarını ifade eder. u_n , Bloch dalga fonksiyonu olup, burada $(n = c, v)$ şeklinde tanımlanır. Burada, c iletkenlik bandını, v valans bandını ifade eder. Hesaplamalarda Bloch fonksiyonların Brillouin bölgesinin

merkezinde olduğu kabul edilmektedir (Γ noktası). Böylece, Kane modeli çerçevesinde Γ_6 ve Γ_7 bölgelerinde iletkenlik bant için $u_c = iS$ ve valans bant için ise $u_v = -\frac{1}{\sqrt{2}}(X + iY)$ olarak yazabiliriz (Peter Cardona 2010). Burada, X , Y ve S , \mathbf{r} 'e bağlı fonksiyonlardır. Bunlar $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ ve $z = z$ bağlantıları kullanılarak kolayca silindirik koordinatlara geçilebilir. Işığın polarize vektörünün yönü e_ρ yönünde olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda yukarıdaki ifade de $\langle u_c | \mathbf{ep} | u_v \rangle$ matris elemanı,

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y) \cdot \langle iS \uparrow | (p_x - ip_y) | -\frac{1}{\sqrt{2}}(X + iY) \uparrow \rangle = \left(-\frac{P}{\sqrt{2}} \frac{\mu_0}{\hbar} - \frac{P}{\sqrt{2}} \frac{\mu_0}{\hbar} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x - ie_y) = -P \frac{\mu_0}{\hbar}(e_x - ie_y) \quad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $P = -i \frac{\hbar}{\mu_0} \langle S | p_\rho | X + iY \rangle$ Kane momentum matris elemanıdır (Hashimzade vd. 2006). Yukarıdaki ifade de momentum matris elemanı,

$$E_p = \frac{2}{\mu_0} p^2 \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır. E_p 'in değeri deneysel olarak ($Cd_{1-x}Mn_xTe$ için $E_p = 18.8eV$) ($Cd_{1-x}Mn_xTe$ için $E_p = 18.8eV$) hesaplanmıştır (Hashimzade vd. 2006). Daha sonra, Denklem 'deki,

$$\int_V \psi_f^{e*} \psi_i^h d\mathbf{r} \quad (4.10)$$

ifadesinin değeri hesaplanır. Burada,

$$\psi_f^e(\rho, \phi, z) = \frac{e^{im\phi}}{\lambda_e \sqrt{2\pi}} \left(\frac{n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda_e^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda_e^2} \right)^{\frac{m}{2}} \times L_{n_\rho}^m \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda_e^2} \right) \sqrt{\frac{2}{L(\rho)}} \sin \left(\frac{n\pi z}{L(\rho)} + n\pi \right) \quad (4.11)$$

$$\psi_i^h(\rho, \phi, z) = \frac{e^{im'\phi}}{\lambda_h \sqrt{2\pi}} \left(\frac{n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m' + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda_h^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda_h^2} \right)^{\frac{m'}{2}} \times \quad (4.12)$$

$$L_{n_\rho}^{m'} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda_h^2} \right) \sqrt{\frac{2}{L(\rho)}} \sin \left(\frac{n'\pi z}{L(\rho)} + n'\pi \right)$$

sırasıyla elektronun ve holün dalga fonksiyonlarını ifade eder. Bu dalga fonksiyonları dikkate alınarak Denklem 'deki integrali hesaplanır. Bunun için fonksiyonlar integralde yerine yazılırsa

$$\int \psi_f^e \psi_i^h dV = \frac{1}{\lambda_e \sqrt{2\pi}} \left(\frac{n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\lambda_h \sqrt{2\pi}} \left(\frac{n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + m' + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \times \quad (4.13)$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda_e^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda_h^2} \right)^{\frac{m'}{2}} L_{n_\rho}^{m'} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda_h^2} \right) e^{-\frac{\rho^2}{4\lambda_e^2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda_e^2} \right)^{\frac{m}{2}} L_{n_\rho}^m \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\lambda_e^2} \right) \rho d\rho \times$$

$$\int_0^{2\pi} e^{(m'-m)i\phi} d\phi \int_0^{L_0} \sqrt{\frac{2}{L(\rho)}} \sin \left(\frac{n\pi z}{L(\rho)} + n\pi \right) \sqrt{\frac{2}{L(\rho)}} \sin \left(\frac{n'\pi z}{L(\rho)} + n'\pi \right) dz$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\lambda_e = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu_e \Omega_e}} \quad (4.14)$$

$$\lambda_h = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu_h \Omega_h}}$$

$$\Omega_e = \sqrt{\left(\frac{eB}{\mu_e} \right)^2 + \frac{4\hbar^2 \beta_e^2}{\mu_e^2}} \quad (4.15)$$

$$\Omega_h = \sqrt{\left(\frac{eB}{\mu_h} \right)^2 + \frac{4\hbar^2 \beta_h^2}{\mu_h^2}}$$

$$\beta_e = \frac{\pi n}{R_0 L_0} \quad (4.16)$$

$$\beta_h = \frac{\pi n'}{R_0 L_0}$$

olarak ifadeler tanımlanmıştır. Burada, μ_h ve μ_e holün ve elektronun etkin kütleleridir. İntegralde z ve ϕ bağlı integrallerin değeri Denklem (3.173) ve Denklem (3.172)'de hesaplanmıştır. Hesaplama sonucunda,

$$\Theta = \int_0^{2\pi} e^{i(-m'+m)\phi} d\phi = 2\pi \delta_{mm'} \quad (4.17)$$

$$\Lambda = \frac{2}{L_0} \int_0^{L_0} \sin\left(\frac{\pi z n'}{L_0} + \pi n'\right) \sin\left(\frac{\pi z n}{L_0} + \pi n\right) dz = \delta_{nn'} \quad (4.18)$$

ifadeler bulunmuştur. İntegral ifadesinde ρ 'ya bağlı integralin değeri,

$$Q = \int_0^\infty e^{-\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{1}{\lambda_h^2} + \frac{1}{\lambda_e^2}\right)} \left(\frac{1}{2\lambda_h^2}\right)^{\frac{m'}{2}} \left(\frac{1}{2\lambda_e^2}\right)^{\frac{m}{2}} L_{n'}^{m'}\left(\frac{1}{2\lambda_h^2}\right) L_{n_p}^m\left(\frac{1}{2\lambda_e^2}\right) \rho d\rho \quad (4.19)$$

şeklinde yazılır. Daha sonra, Denklem (4.17) ve Denklem (4.18)'deki integrallerin değerlerinin sıfırdan farklı olması için $m = m'$ ve $n = n'$ olması gerekmektedir. Bunlar dikkate alındığında λ_e ve λ_h değerleri yaklaşık olarak eşit olduğu kabul edilebilir. Şimdi,

$$x = \frac{\rho^2}{2\lambda_e^2}, \quad dx = \frac{1}{\lambda_e^2} \rho d\rho. \quad (4.20)$$

parametreleri tanımlansın. Bunlar integralde yazılırsa,

$$Q = \lambda_e^2 \int_0^\infty e^{-x} x^m L_{n_p}^m(x) L_{n'}^m(x) dx \quad (4.21)$$

ifadesi elde edilir. Bu integralin çözümü,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \delta_{nm} \quad (4.22)$$

bağlantısı dikkate alınarak (Gradshtein ve Zwillinger 2015),

$$Q = \lambda_e^2 \frac{\Gamma(m + n_\rho + 1)}{n_\rho!} \quad (4.23)$$

olarak elde edilir. Daha sonra,

$$T = \frac{1}{\lambda_e \lambda_e 2\pi} \left(\frac{n_\rho! n_{\rho'}!}{\Gamma(n_\rho + m + 1) \Gamma(n_{\rho'} + m' + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.24)$$

terimi tanımlanır. Böylece Denklem (4.7),

$$\mathbf{ep}_{vc} = \sqrt{\frac{E_p \mu_0}{2}} T \Theta \Lambda Q \quad (4.25)$$

şeklinde yazılır. Bantlar arası optik geçiş durumu için Denklem (3.152)'deki soğurma katsayısı ifadesindeki Dirac fonksiyonu,

$$\delta(E_f - E_i - \hbar\omega) = \delta(\hbar\omega - E_g - E_f^e - E_i^h). \quad (4.26)$$

şeklinde yazılır. Burada, iletkenlik bandındaki elektronun,

$$E_f^e = \frac{\hbar^2}{2\mu_e} \gamma_e^2 - \frac{\hbar\omega_c^e m}{2} + \hbar\Omega_e \left(n_\rho + \frac{m+1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sigma g_e^* \mu_B B \quad (4.27)$$

ve valans bandındaki holün enerji spektrumları,

$$E_i^h = \frac{\hbar^2}{2\mu_h} \gamma_h^2 - \frac{\hbar\omega_c^h m'}{2} + \hbar\Omega_h \left(n_{\rho'} + \frac{m'+1}{2} \right) + \frac{1}{2} \sigma g_h^* \mu_B B \quad (4.28)$$

şeklinde ifade edilir. Burada,

$$\gamma_e = \frac{\pi^2 n^2}{L_0} \quad (4.29)$$

$$\gamma_h = \frac{\pi^2 n'^2}{L_0}$$

$$g_e^* = g_e + \frac{\tau N_0 x}{\mu_B B} \langle S_z \rangle \quad (4.30)$$

$$g_h^* = g_h + \frac{\theta N_0 x}{\mu_B B} \langle S_z \rangle$$

DMS yapılarında yasak bant enerji aralığı Mn atomunun konsantrasyonuna bağlı olmaktadır (Furdyna 1988). Dirak fonksiyonundaki E_g yasak bant enerji aralığı $T = 4.2K$ sıcaklıkta $Cd_{1-x}Mn_xTe$ yapısı için,

$$E_g = 1.595 + 1.592x \quad (4.31)$$

şeklinde tanımlanır (Furdyna, 1988). Dirak delta fonksiyonunu,

$$\delta(x) \approx \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{x^2 + \Gamma^2} \quad (4.32)$$

yaklaşımı ile,

$$\delta(\hbar\omega - E_g - E_f^e - E_i^h) \approx \frac{1}{\pi} \frac{G}{(\hbar\omega - E_g - E_f^e - E_i^h)^2 + G^2} \quad (4.33)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, valans bandının enerji durumlarının dolu ve iletkenlik bandının enerji durumlarının boş olduğunu kabul edilerek, Rashba parametresi sıfır durumunda bantlar arası optik geçişler için soğurma katsayısını

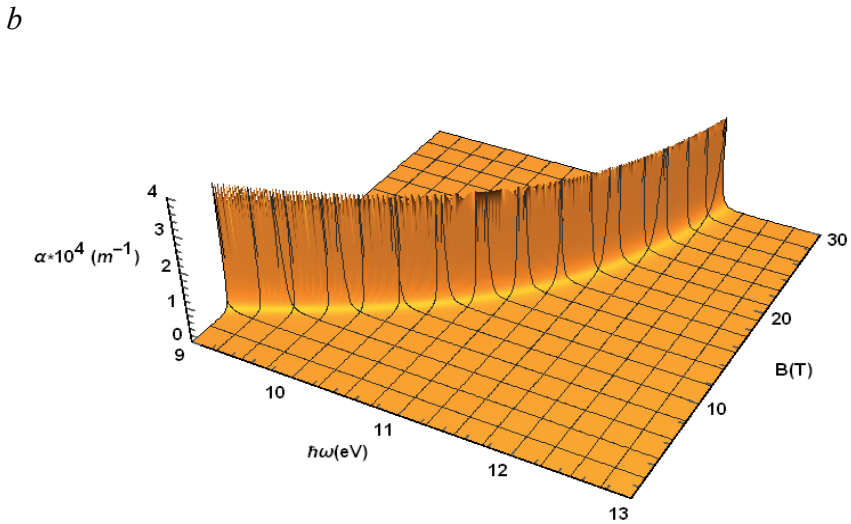
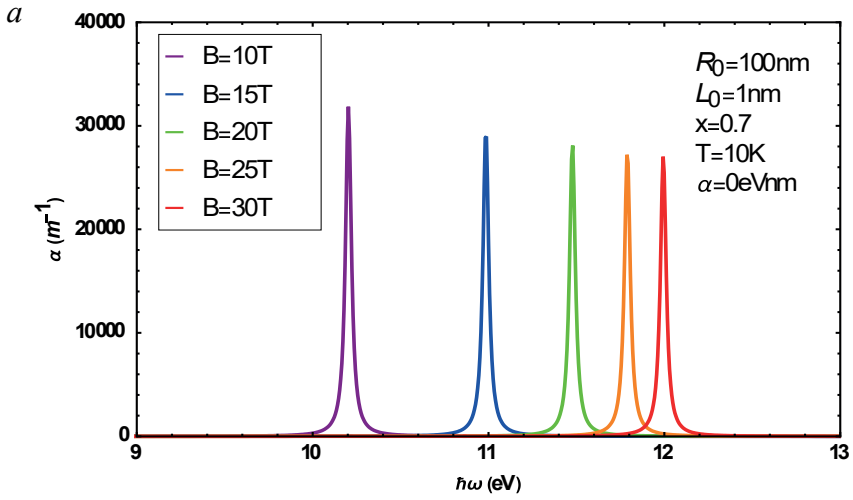
$$\alpha(\hbar\omega) = \frac{2\pi e^2 \hbar E_p}{\varepsilon_0 c n_0 \mu_0 \hbar \omega V} (T \Theta \Lambda Q)^2 \frac{G}{(\hbar\omega - E_g - E_f^e - E_i^h)^2 + G^2} \quad (4.34)$$

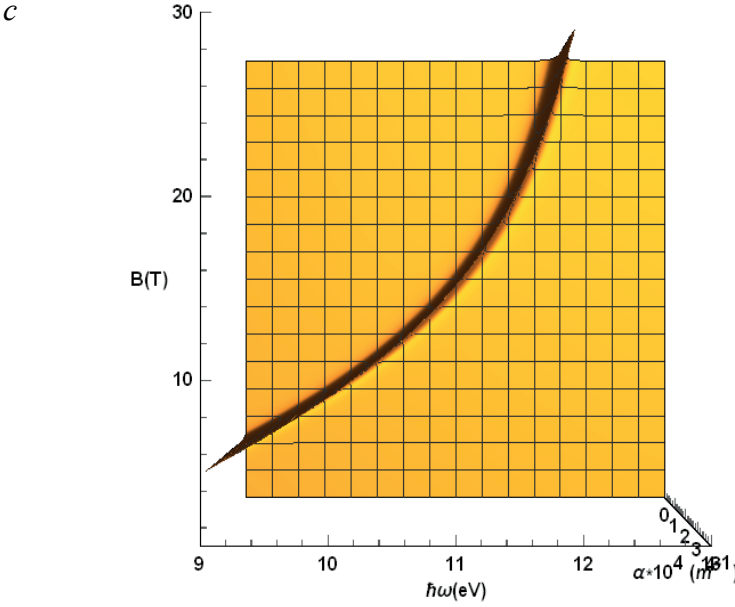
şeklinde yazılabilir.

Şimdi, bantlar arası optik geçişler için soğurma katsayısının $111 \rightarrow 111$ optik geçiş durumları için incelediğimiz parametrelere göre nasıl değiştiğini araştıralım.

Şekil 4.13'de soğurma katsayısının farklı manyetik alan değerlerine göre grafiği verilmiştir. Manyetik alanın artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu azalmakta, foton enerjisi maviye doğru kaymaktadır. Manyetik alanın artması bantlar arası mesafenin artmasına neden olur. Bantlar arası mesafenin artması ise elektronun valans bandından iletkenlik bandına geçiş yapması için gerekli olan enerjinin artmasına neden olur. Bu ise, şekilde soğurma katsayısının maksimumunun sağa kayması olarak görülür. Manyetik alanın değerinin

artması sonucunda bantlar arası optik geçiş olasılığının azalmasına ve böylece şekilde soğurma maksimumunun düşmesine neden olur. Ayrıca, bantlar arası optik geçişin soğurma katsayısının maksimumları arasındaki mesafenin (Şekil 4.1), bantlar içi optik geçişler durumundaki soğurma katsayısının maksimumları arası mesafeye göre (Şekil 4.13) daha büyük olduğu görülmektedir. Manyetik alanın aynı değerinde bantlar arası durum için soğurma katsayısının maksimumu bantları içi durumun soğurma katsayısının maksimumuna göre yaklaşık 1/2 'si kadardır. Örneğin, manyetik alanın $B = 10T$ değerinde bantlar içi durum için soğurma katsayısı $\alpha(\hbar\omega) \approx 80 \cdot 10^3 m^{-1}$ değerinde karşılık geliyor iken, bantlar arası durumu için soğurma katsayısı $\alpha(\hbar\omega) \approx 35 \cdot 10^3 m^{-1}$





Şekil 4.13. Bantlar arası optik geçişleri için soğurma katsayısının farklı manyetik alanın değerlerine göre değişimi.

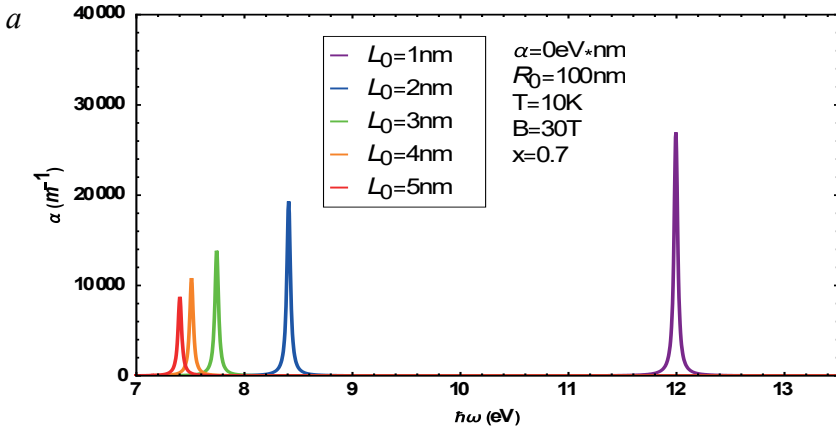
karşılıklı gelmektedir. Şekil 4.13b’de ve şekil 4.13c’de soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisi ve manyetik alana göre değişimin grafiği verilmiştir. Şekil 4.13c’de soğurma katsayısının maksimumu manyetik alan ve gelen foton enerjisi açısından lineer olmayan şekilde değiştiği görülmektedir.

Soğurma katsayısının maksimumunun L_0 ’in farklı değerlerine göre değişimin grafiği Şekil 4.14’da verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi elipsoidin OZ yönündeki kalınlığının artması soğurma katsayısının maksimum azalmakta, grafiği sola kaymakta ve fotonun enerjisi kırmızıya kaymaktadır. Benzer davranış bantlar içi optik geçişlerinde de görülmektedir. Ancak, bantlar arası geçişlerde foton enerjisine göre maksimumlar arası mesafe bantlar içi durumuna göre çok daha büyük olduğu görülmektedir. Özellikle, $L_0 = 1nm$ ve $L_0 = 2nm$ parametrelerine karşılık gelen soğurma katsayısı maksimumları arasındaki farklarda iyi görülmektedir. Elipsoidin kalınlığının artması valans bandı ile iletkenlik bandı arasındaki enerji farkının azalmasına ve böylece fotonun daha düşük enerjiye sahip olduğu durumlarda optik geçişleri mümkün kılar. Şekil 4.14b’de ve şekil 4.14c’de soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisine ve elipsoidin kalınlığına göre değişimin grafiği verilmiştir.

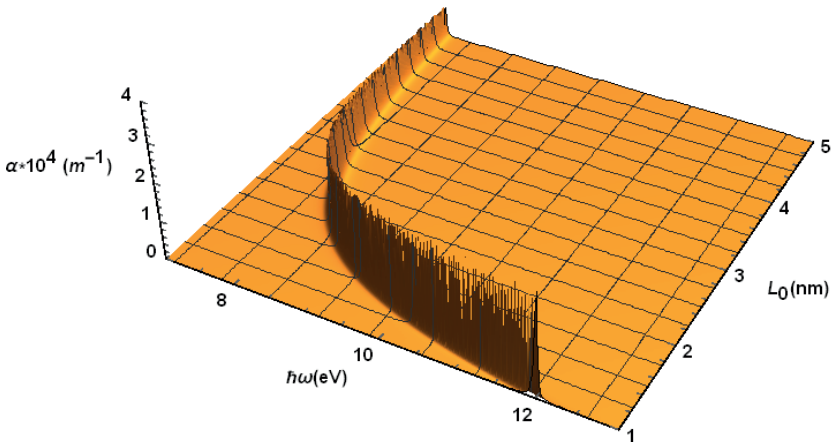
Şekil 4.14’de L_0 ’in gelen foton enerjisine göre değişimi doğrusal olmayan bir şekilde değişmektedir.

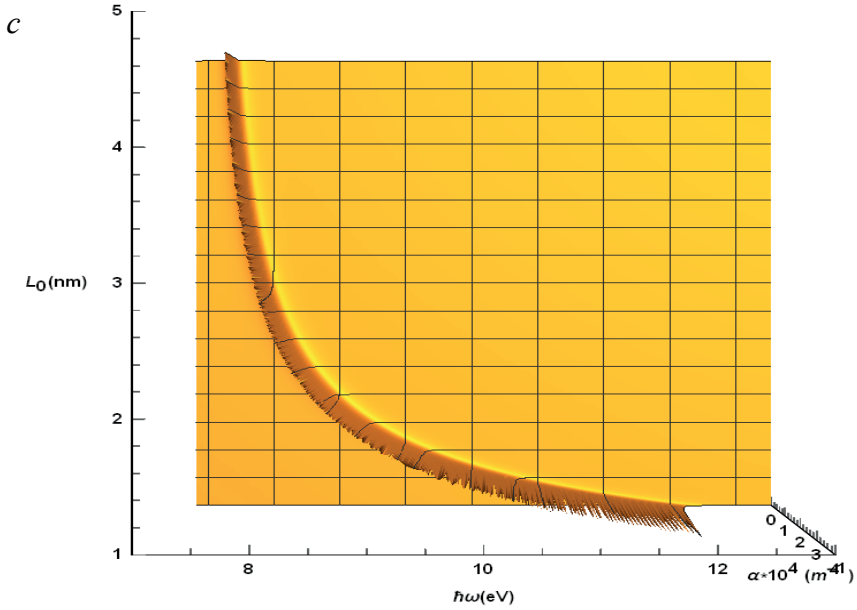
Şekil 4.15’de soğurma katsayısının maksimumu elipsoidin XOY düzlemindeki yarıçapı R_0 artmasıyla azalmakta, grafik sola kaymakta ve foton enerjisi kırmızıya kaymaktadır. Şekil 4.15b’de ve şekil 4.15c’de soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisi ve elipsoidin yarıçapına göre değişimin grafiği verilmiştir.

Şekil 4.16’de bantlar arası optik geçiş durumu için DMS teriminin soğurma katsayısının maksimumuna etkisi görülmektedir. Burada x konsantrasyonunun artmasıyla soğurma katsayısının maksimum değeri azalmakta, grafik sağa kaymakta ve fotonun enerjisi maviye kaymaktadır. Şekil 4.16b’de ve şekil 4.16c’de soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisi ve x göre değişimin grafiği verilmiştir. Soğurma katsayısının x ve gelen foton enerjisi açısından değişimi linear olarak değişmektedir (Şekil 4.16c).

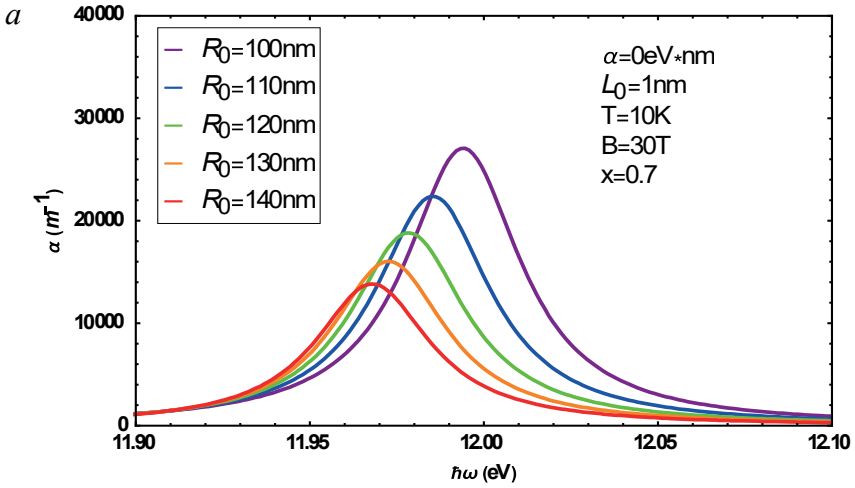


b

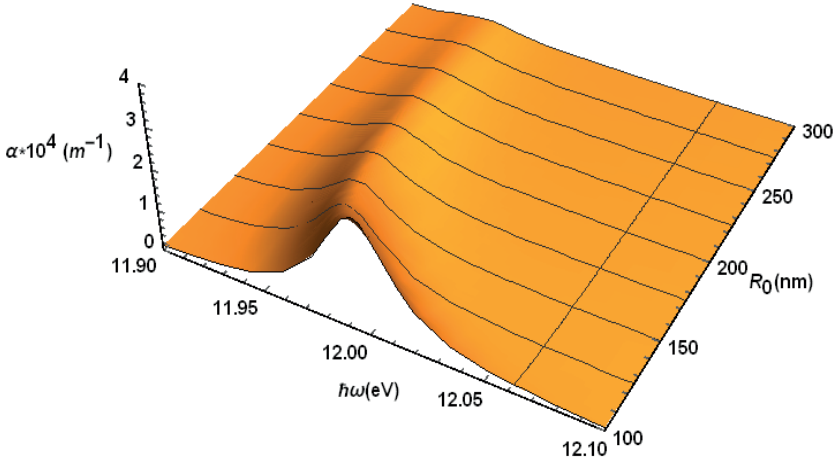




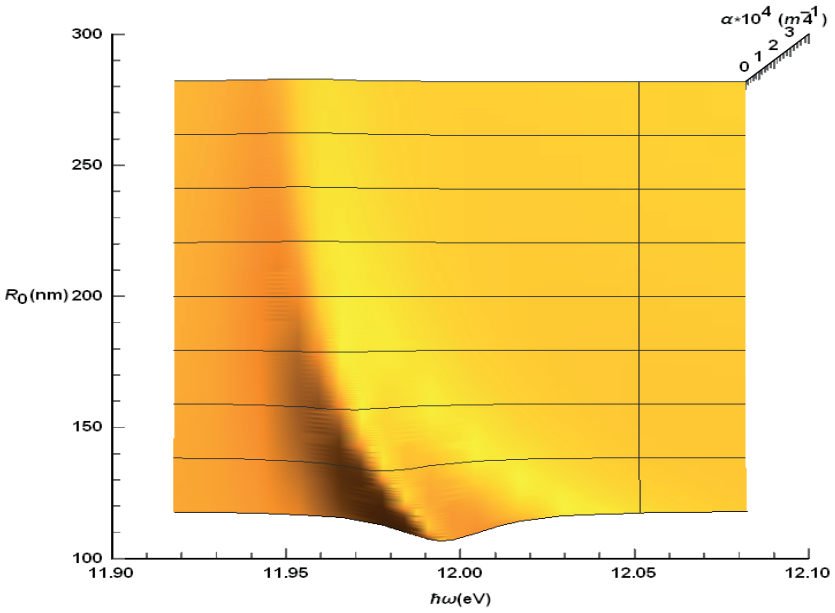
Şekil 4.14. L_0 parametresinin farklı değerlerine göre soğurma katsayısının grafiği.



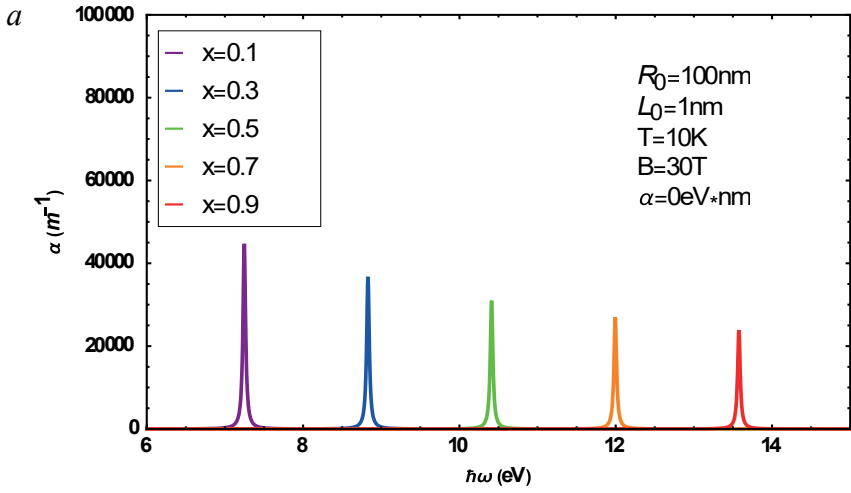
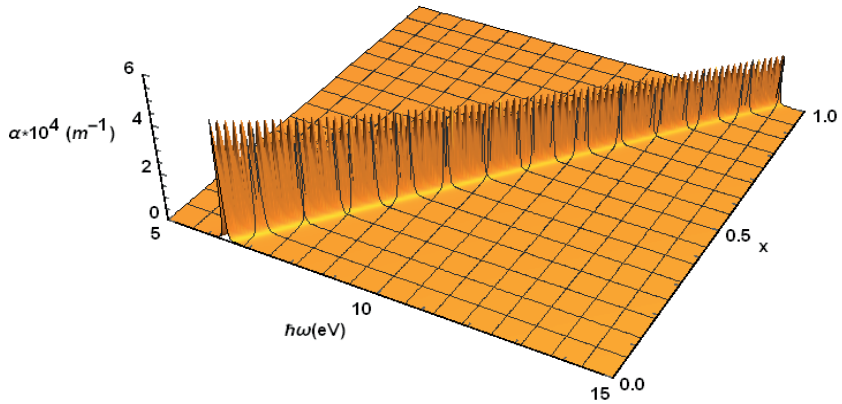
b

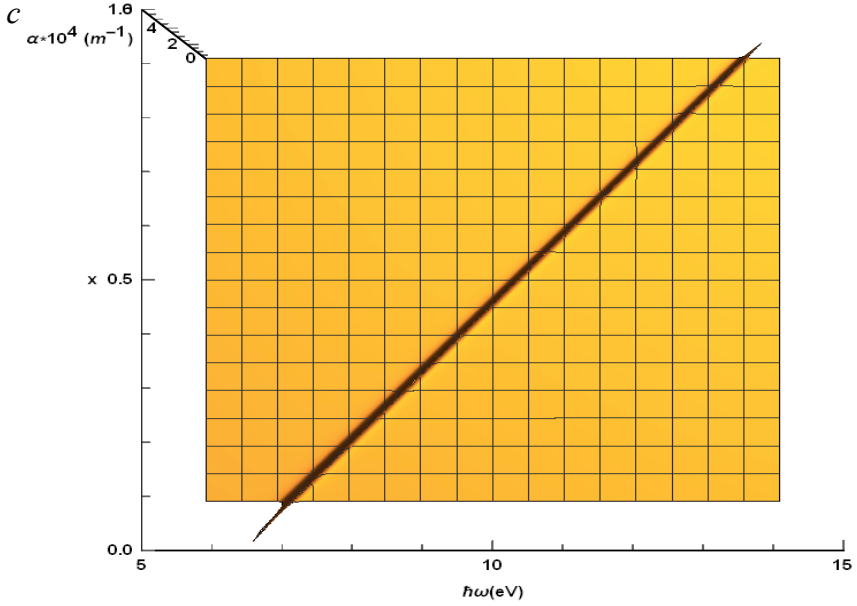


c

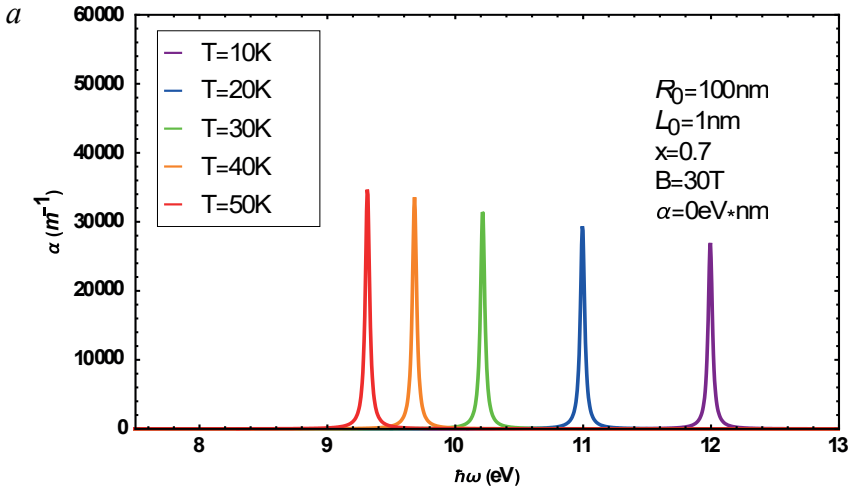


Şekil 4.15. R_0 'in farklı değerlerine göre soğurma katsayısının grafiği.

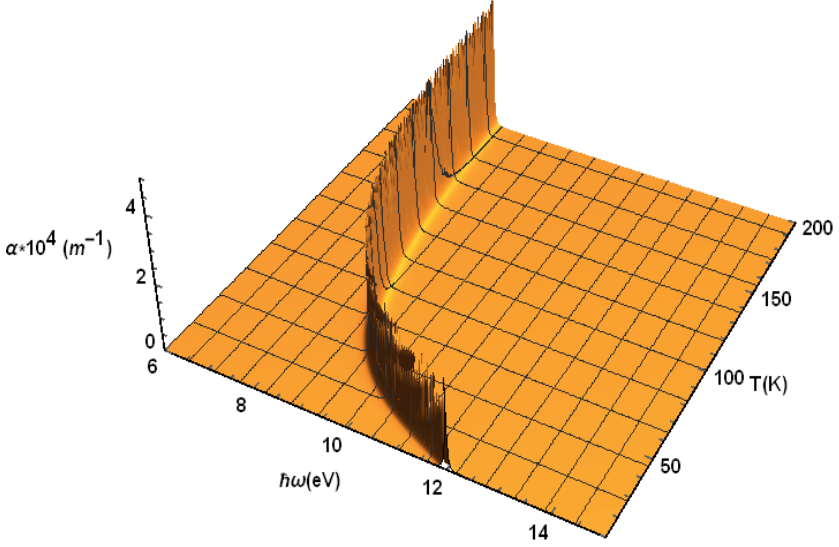
*b*



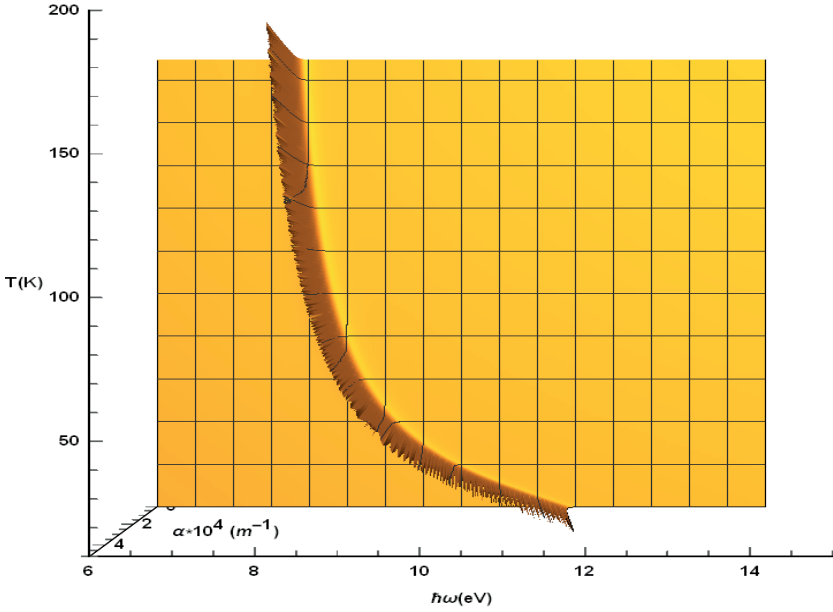
Şekil 4.16. Farklı Mn atomunun konsantrasyon değerlerinde soğurma katsayısının bantlar arası optik geçişler için grafiği.



b



c



Şekil 4.17. Sıcaklığın farklı değerlerine göre soğurma katsayısının grafiği.

Şekil 4.17'deki sıcaklığın farklı değerlerine göre soğurma katsayısının grafiği görülmektedir. Bu grafiğe göre sıcaklığın artmasıyla soğurma katsayısının maksimum değeri artmakta, grafik sola kaymaktadır. Şekil 4.17b'de ve şekil 4.17c'de soğurma katsayısının gelen fotonun enerjisi ve sıcaklığa göre değişimin grafiği verilmiştir. Sıcaklığın ve gelen foton enerjisine göre değişimi lineer olmayan şekilde değişmektedir (Şekil 4.17c).

5. SONUÇ

Bu doktora tez çalışmasında, $Cd_{1-x}Mn_xTe$ seyreltilmiş yarımanyetik yarıiletken elipsoid kuantum noktanın Rashba spin-yörünge etkileşimi varken optik özellikleri araştırılmıştır. Elipsoid kuantum noktanın enerji spektrumu ve dalga fonksiyonu adyabatik yaklaşım kullanarak bulunmuştur. Elipsoid geometriye sahip sınırlayıcı potansiyel içerisinde bulunan elektronun dalga fonksiyonu $\psi(\rho, \phi, z) = e^{im\phi} R(\rho) \chi_\rho(z)$ şeklinde, değişkenlerine göre ikiye ayrılmıştır. Elipsoidin kalınlığı z eksenini yönünde alındı ve vektör boyunca değişim z ekseninde “hızlı” alt sistem olarak tanımlanmıştır. Elipsoidin çapını ifade eden büyük yarı eksen boyunca ise ρ ve ϕ değişkenleri ile tanımlanan vektör boyunca değişim “yavaş” alt sistem olarak tanımlanmıştır. Elektronun “hızlı” alt sistemindeki değişimi, “yavaş” alt sistemdeki etkin bir potansiyel olarak kabul edilmiştir. Tanımlanan her iki alt sistemin Schrödinger denklemlerinin çözümü etkin kütle yaklaşımı çerçevesinde hesaplanmıştır. “Hızlı” alt sisteminin Schrödinger denklemi çözülerek elde edilen enerji spektrumu “yavaş” alt sisteminin Schrödinger denkleminin etkin potansiyeli olarak alınmıştır. “Yavaş” alt sistemi için lineer bağımlı iki tane lineer denklemi elde edildi. Her bir denklemin çözümü, dalga fonksiyonlarının Kummer denklemine dönüştürülerek dejener hypergeometrik fonksiyonlar şeklinde bulundu.

Daha sonra, enerji spektrumu ve dalga fonksiyonu ifadeleri kullanılarak soğurma katsayısı elde edildi. Soğurma katsayısında yer alan $|\mathbf{ep}_{if}|^2$ momentum matris elemanı, kuantum sistemimizdeki izinli ve izinli olmayan optik geçişleri ifade eder. Bunun yanında, momentum matris elemanı bantlar içi ve bantlar arası optik geçişleri temsil eden iki terime ayrılmaktadır. Soğurma katsayısını, öncelikle bantlar içi optik geçişleri temsil eden momentum terimi dikkate alınarak incelenmiştir. Hesaplamaların sonucunda elipsoid kuantum noktasının izinli bantlar için optik geçişleri $m = m'$ ve $n = n'$ seçim kuralına uymaktadır. Bu elektronun, ışını soğurması sonucunda aynı bant içerisinde bulunduğu enerji durumundan daha üst enerji durumuna geçişi sadece aynı m ve n kuantum sayılarına karşılık gelen enerji durumları arasında mümkün olacağı anlamına gelir.

$Cd_{1-x}Mn_xTe$ seyreltilmiş yarımmanyetik yarıiletkenin bant içi optik geçişlerinin incelenmesinde bantlar (nmn_ρ) olarak ifade edildi. Yapılan hesaplamalarda elektronun bant içerisindeki geçişinin $(110) \rightarrow (111)$ şeklinde olduğu kabul edilmiştir. Buna göre bant içi optik geçişlerin incelenmesinde:

1. Şekil 4.1’de, elipsoidin merkez kalınlığı $L_0 = 1nm$ iken manyetik alanın artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu azalmakta ve ışığın dalga boyu mavi renge doğru kaymaktadır. Yani, manyetik alanın artmasıyla optik geçişler azalmakta ve gelen ışığın daha küçük dalga boylarına göre gerçekleşmektedir. Şekil 4.2’de elipsoidin merkez kalınlığı $L_0 = 10nm$ kadar artırılırsa, manyetik alanın artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu artmakta ve ışığın dalga boyu mavi renge doğru kaymaktadır. Ayrıca $L_0 = 1nm$ iken soğurma katsayısının maksimumu değeri $L_0 = 10nm$ iken maksimum değerine göre çok büyük olduğu görülmektedir. Şekil 4.1b ve Şekil 4.1c’deki soğurma katsayısının maksimumu manyetik alan arttıkça gelen foton enerjisine göre sağa kaydığı görülmektedir. Ayrıca bu kayma manyetik alan ve foton enerjisi değişimi açısından lineerdir;

2. Şekil 4.3’de elipsoidin kalınlığı L_0 ’in artmasıyla soğurma katsayısının maksimum değeri azalmakta ve enerjinin sola doğru kaydığı görülmektedir. Bu da gelen fotonun dalga boyunun kırmızı renge doğru kaydığı anlamına gelir. Gelen foton enerjisini ve L_0 açısından Şekil 4.3b ve Şekil 4.3c’e baktığımızda L_0 düşük değerlerinde gelen foton enerjisine göre lineer olmayan şekilde ve L_0 arttıkça gelen foton enerjisinden bağımsız olduğunu görebiliriz;

3. Şekil 4.4’de elipsoidin R_0 yarıçapı arttığında, soğurma katsayısının maksimum değerinin azaldığı ve soğurma katsayısının maksimumunun sola doğru kaydığı görülmektedir. Yani, R_0 ’in artmasıyla uyarılma daha büyük dalga boylarında gerçekleşmekte ve fotonun dalga boyu kırmızıya kaymaktadır. Şekil 4.5’de elipsoidin yarıçapı $R_0 = 500nm$ alındığında, soğurma katsayısının maksimumu manyetik alanın artmasıyla artmakta ve grafik sağa doğru kaymaktadır. Manyetik alanın artmasıyla uyarılma daha küçük dalga boylarında gerçekleşmekte ve foton maviye doğru kaymaktadır. Ayrıca soğurma katsayısının maksimum değeri Şekil 5.4’ e göre oldukça düşüktür. Şekil 4.4c’de, Şekil 4.3c’deki sonuçların aksine, R_0 ’in gelen foton enerjisinden bağımsız olduğu görülmekte;

4. Şekil 4.6’da Rashba parametresinin artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu azalmakta ve grafik sağa kaymaktadır. Bu nedenle elektronun uyarılması için gerekli olan fotonun enerjisi maviye kaymaktadır. Rashba parametresinin artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu azalmakta ve fotonun dalga boyu maviye kaymaktadır. Rashba parametresinin artması

sonucunda elektronun enerji seviyeleri arasındaki mesafe artmaktadır. Enerji seviyeleri arasındaki mesafenin artması, elektronun ilk enerji durumundan son enerji durumuna optik geçiş yapma olasılığının düştüğü anlamına gelir. Ayrıca enerji seviyelerinin arasındaki mesafenin artması, elektronun optik geçiş yapması için gerekli olan foton enerjisinin de artması demektir. Rashba parametrenin ve gelen foton enerjisine göre değişimi lineer olduğu görülmektedir (Şekil 4.6c);

5. Sıcaklık ve x konsantrasyonu gibi parametrelerin değişimi soğurma katsayısının maksimumunu çok az etkilediği görülmektedir. Şekil 4.7 ve Şekil 4.8’de sıcaklığın artması, soğurma katsayısının maksimumunu azaltmakta, grafiği sağa doğru kaydırmaktadır. Ayrıca fotonun enerjisi maviye kaymaktadır. Aynı davranış x konsantrasyonunun değişiminde de görülmektedir. Şekil 4.10, Şekil 4.11’de Mn atomunun konsantrasyon oranının artması soğurma katsayısının maksimumunu çok az etkilemektedir. Şekil 4.10’dan gördüğümüz gibi Mn atomunun konsantrasyonunun artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu artmakta, grafik sola doğru kaymakta ve fotonun enerjisi kırmızıya doğru kaymaktadır;

6. Şekil 4.9’da foton enerjisinin $\hbar\omega = 0.3eV$ sabit olduğu bunun yanı sıra sıcaklık ve manyetik alanın değişimi ile soğurma katsayısının maksimum değerinin değişmediği görülmektedir. Böylece uyarma enerjisi sabit olduğunda soğurma katsayısının maksimum değerinin sıcaklık ve manyetik alandan bağımsız olduğu anlaşılmaktadır. Şekil 4.12’de ise foton enerjisinin $\hbar\omega = 0.3eV$ değerinde sabit olduğu bunun yanı sıra x konsantrasyonu ve manyetik alanın değişimi ile soğurma katsayısının maksimum değerinin değişmediği görülmektedir. Böylece uyarma enerjisi sabit olduğunda soğurma katsayısının maksimum değerinin x konsantrasyonu ve manyetik alandan bağımsız olduğu anlaşılmaktadır;

Elipsoid kuantum noktanın bantlar arası optik geçişleri için Rashba parametresi $\alpha = 0$ olduğu durumda, $111 \rightarrow 111$ bantlar arası optik geçişler için soğurma katsayısının değişimi:

7. Şekil 4.13’de soğurma katsayısının farklı manyetik alan değerlerine göre grafikte, manyetik alanın artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu azalmakta ve kırmızıya doğru kaymaktadır. Manyetik alanın artması bantlar arası mesafenin artmasına neden olur. Bantlar arası mesafenin artması ise elektronun valans bandından iletkenlik bandına geçiş yapması için gerekli olan enerjinin artmasına neden olur. Ayrıca, bantlar arası optik geçişin soğurma katsayısının maksimumları arasındaki mesafenin (Şekil 4.1), bantlar içi optik geçişler durumundaki soğurma katsayısının maksimumları arası mesafeye göre (Şekil 4.13) daha büyük olduğu görülmektedir. Manyetik alanın aynı değerinde bantlar arası durum için soğurma katsayısının maksimumu bantları

içi durumun soğurma katsayısının maksimumuna göre yaklaşık $1/2$ 'si kadardır. Şekil 4.13c'de soğurma katsayısının maksimumu manyetik alan ve gelen foton enerjisi açısından lineer olmayan şekilde değiştiği görülmektedir;

8. Son olarak Rashba parametresi sıfır durumunda iken bantlar arası optik geçişlerinde soğurma katsayısının maksimumu: manyetik alanın artmasıyla azalmakta ve maviye kaymakta; elipsoidin kalınlığının artmasıyla azalmakta ve kırmızıya kaymakta; elipsoidin yarıçapının artmasıyla azalmakta ve kırmızıya kaymakta; sıcaklığın artmasıyla artmakta ve kırmızıya kaymakta, x konsantrasyonun artmasıyla soğurma katsayısının maksimumu azalmakta ve fotonun enerjisi maviye kaymaktadır.

Yapılan çalışma ile Mn katkılı seyreltilmiş yarımmanyetik yarıiletken lens şeklindeki kuantum noktasını, soğurma katsayısının band içi ve bantlar arası optik özelliklerinin, optik lens kaplamalarındaki deneysel çalışmalara önemli katkı sunması beklenmektedir. Daha sonraki çalışmalarımızda bandlar arası Rashba parametresini içeren optik özelliklerin araştırılması amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., ve Stegun, I. A. 1968. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables (C. 55). US Government printing office.
- Alferov, Z. I., Zhilyaev, Y. V., ve Shmartsev, Y. V. 1971. Splitting of the conduction band in a 'superlattice' based on GaP_xAs_{1-x}. Fizika i Tekhnika Poluprovodnikov, 5, 174.
- Appelbaum I (2009). A Haynes–Shockley experiment for spin-polarized electron transport in silicon. Solid-State Electronics, 53:1242–1245
- Ast, C. R., Henk, J., Ernst, A., Moreschini, L., Falub, M. C., Pacil , D., Bruno, P., Kern, K., ve Grioni, M. 2007. Giant Spin Splitting through Surface Alloying. Physical Review Letters, 98(18), 186807.
- Austing, D. G., Sasaki, S., Tarucha, S., Reimann, S. M., Koskinen, M., ve Manninen, M. 1999. Ellipsoidal deformation of vertical quantum dots. Physical Review B, 60(16), 11514-11523.
- Averkiev, N. S., ve Golub, L. E. 1999. Giant spin relaxation anisotropy in zinc-blende heterostructures. Physical Review B, 60(23), 15582-15584.
- Babanlı, A., Balcı, M., ve Sabyrov, V. 2023. Optical properties of an ellipsoidal quantum dot with a diluted magnetic semiconductor structure. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 586, 171146.
- Bercioux, D., Lucignano, P., 2015. Quantum transport in Rashba spin–orbit materials: a review, Report on Progress in Physics, 78, 1-30.
- Besombes, L., Leger, Y., Bernos, J., Boukari, H., Mariette, H., Poizat, J. P., Clement, T., Fernández-Rossier, J., ve Aguado, R. 2008. Optical probing of spin fluctuations of a single paramagnetic Mn atom in a semiconductor quantum dot. Physical Review B, 78(12), 125324.
- Bihlmayer, G., Koroteev, Yu. M., Echenique, P. M., Chulkov, E. V., ve Bl gel, S. 2006. The Rashba-effect at metallic surfaces. Surface Science, 600(18), 3888-3891.
- Bimberg, D., Grundmann, M., ve Ledentsov, N. N. 1999. Quantum dot heterostructures. John Wiley.
- Bimberg, D., Grundman, M., Ledentsov, M., 2001. Quantum Dot Heterostructures. John Wiley, New York.
- Bloch, F. 1928. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices. Z. Phys, 52, 555-600.
- Bogachek, E. N., Scherbakov, A. G., ve Landman, U. 1996. Magnetic switching and thermal enhancement of quantum transport through nanowires. Physical Review B, 53(20), R13246-R13249.
- Bychkov, Y. A., ve Rashba,  . I. 1984. Properties of a 2D electron gas with lifted spectral degeneracy. JETP lett, 39(2), 78.
- Can M M (2011). Co Katkılı ZnO Seyreltik Manyetik İnce Filmlerin Sentezi ve Fiziksel  zellikleri. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstit s , Ankara, Türkiye.
- Cantele, G., Ninno, D., ve Iadonisi, G. 2000. Confined states in ellipsoidal quantum dots. Journal of Physics: Condensed Matter, 12(42), 9019-9036.
- Cantele, G., Ninno, D., Iadonisi, G. 2001. Calculation of the Infrared Optical Transitions in Semiconductor Ellipsoidal Quantum Dots. Nano Letters, 1(3), 121-124.
- Chang, L. L., Esaki, L., ve Tsu, R. 1974. Resonant tunneling in semiconductor double barriers. Applied Physics Letters, 24(12), 593-595.

- Chappert, C., Fert, A., ve Van Dau, F. N. 2007. The emergence of spin electronics in data storage. *Nature Materials*, 6(11), 813-823.
- Chen, T., Xie, W., ve Liang, S. 2012. The nonlinear optical rectification of an ellipsoidal quantum dot with impurity in the presence of an electric field. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 44(4), 786-790.
- Christen, J., ve Bimberg, D. 1990. Line shapes of intersubband and excitonic recombination in quantum wells: Influence of final-state interaction, statistical broadening, and momentum conservation. *Physical Review B*, 42(11), 7213-7219.
- Christen, J., Krahl, M., ve Bimberg, D. 1990. Visualization of the transition from 2d to 3d and from non-k-conservation to k-conservation in the lineshapes of quantum wells and true superlattices. *Superlattices and Microstructures*, 7(1), 1-4.
- Çakmaktepe, Ş., 2006. Kane Tipi Yarıiletken Kuantum Çubuklarında Yük Taşıyıcılarının Enerji Spektrumları. *Fizik Anabilim Dalı*, 3s. Isparta
- Datta, S., ve Das, B. 1990. Electronic analog of the electro-optic modulator. *Applied Physics Letters*, 56(7), 665-667.
- Davis, R. H., ve Hosack, H. H. 1963. Double Barrier in Thin-Film Triodes. *Journal of Applied Physics*, 34(4), 864-866.
- Dingle, R., Wiegmann, W., ve Henry, C. H. 1974. Quantum States of Confined Carriers in Very Thin Al_xGa_{1-x}As-GaAs-Al_xGa_{1-x}As Heterostructures. *Physical Review Letters*, 33(14), 827-830.
- Dresselhaus, G. 1955. Spin-Orbit Coupling Effects in Zinc Blende Structures. *Physical Review*, 100(2), 580-586.
- Dvayan, K. G., Kazaryan, E. M., ve Petrosyan, L. S. 2005. Electronic states in quantum dots with ellipsoidal symmetry. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 28(4), 333-338.
- D'yakonov, M. 1986. Spin relaxation of two-dimensional electrons in non-centrosymmetric semiconductors. *Sov. Phys. Semicond.*, 20(1), 110-112.
- Edelstein, V. M. 1990. Spin polarization of conduction electrons induced by electric current in two-dimensional asymmetric electron systems. *Solid State Communications*, 73(3), 233-235.
- Esaki, L., ve Tsu, R. 1970. Superlattice and negative differential conductivity in semiconductors. *IBM Journal of Research and Development*, 14(1), 61-65.
- Fabian, J., Matos-Abiague, A., Ertler, C., Stano, P., ve Zutic, I. 2007. Semiconductor Spintronics. *Acta Physica Slovaca. Reviews and Tutorials*, 57(4-5).
- Faist, J., Capasso, F., Sivco, D. L., Sirtori, C., Hutchinson, A. L., ve Cho, A. Y. 1994. Quantum Cascade Laser. *Science*, 264(5158), 553-556.
- Ferreira, W. S., Sousa, J. S. D., Freire, J. A. K., Farias, G. A., ve Freire, V. N. 2006. Optical properties of ellipsoidal CdSe quantum dots. *Brazilian Journal of Physics*, 36(2a), 438-439.
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., ve Sands, M. 1965. The feynman lectures on physics; vol. I. *American Journal of Physics*, 33(9), 750-752.
- Fox, M., ve Ispasoiu, R. 2006. Quantum Wells, Superlattices, and Band-Gap Engineering. İçinde S. Kasap ve P. Capper (Ed.), *Springer Handbook of Electronic and Photonic Materials* (ss. 1021-1040). Springer US.
- Furdyna, J. K. 1988. Diluted magnetic semiconductors. *Journal of Applied Physics*, 64(4), R29-R64.
- Gaj, J. A., Gatązka, R. R., ve Nawrocki, M. 1993. Giant exciton Faraday rotation in Cd_{1-x}MnxTe mixed crystals. *Solid State Communications*, 88(11-12), 923-925.
- Galitskiy, V. M., Karnakov, B. M., ve Kogan, V. I. 1992. *Problems in Quantum Mechanics* (2. bs). Nauka.
- Gell-Mann, M., ve Brueckner, K. A. 1957. Correlation energy of an electron gas at high density. *Physical Review*, 106(2), 364.

- Gibbs, J. W., ve Wilson, E. B. 1901. Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs. Yale University Press.
- Glazman, L., Lesovik, G., Khmel'Nitskii, D., ve Shekhter, R. 1988. Reflectionless quantum transport and fundamental ballistic-resistance steps in microscopic constrictions. *ZhETF Pisma Redaktsiui*, 48, 218.
- Goryca, M., Kazimierzczuk, T., Nawrocki, M., Golnik, A., Gaj, J. A., Kossacki, P., Wojnar, P., ve Karczewski, G. 2009. Optical Manipulation of a Single Mn Spin in a CdTe-Based Quantum Dot. *Physical Review Letters*, 103(8), 087401.
- Gradshteyn, I. S., ve Zwillinger, D. 2015. Table of integrals, series, and products (Eighth edition). Elsevier, Academic Press is an imprint of Elsevier.
- Griffiths, D. J. 2017. Introduction to Quantum Mechanics. Cambridge University Press.
- Harrison, P., 1999. Quantum Wells, Wires and Dots. John Wiley and Sons Ltd, Chichester
- Harper, R. L., Bicknell, R. N., Blanks, D. K., Giles, N. C., Schetzina, J. F., Lee, Y. R., ve Ramdas, A. K. 1989. Excited confined quantum states in CdMnTe-CdTe superlattices. *Journal of Applied Physics*, 65(2), 624-628.
- Hashimzade, F. M., Babayev, A. M., ve Mehdiyev, B. H. 2006. Rashba spin-orbit coupling effects in Cd_{1-x}Mn_xTe quantum dots. *Physical Review B*, 73(24), 245321.
- Ho Park, Y., Kim, H., Chang, J., Hee Han, S., Eom, J., Choi, H.-J., ve Cheol Koo, H. 2013. Separation of Rashba and Dresselhaus spin-orbit interactions using crystal direction dependent transport measurements. *Applied Physics Letters*, 103(25), 252407.
- Holm, R. T., ve Furdyna, J. K. 1977. Microwave helicon propagation and helicon-excited electron paramagnetic resonance in Hg_{1-x}Mn_xTe. *Physical Review B*, 15(2), 844-864.
- Huang C, Guo Y, Liu X, Wang Y (2006). Structural and optical properties of Ti_{1-x}CoxO₂ films prepared by sol-gel spin coating. *Thin Solid Films*, 505:141 – 144
- Hasançebi Ö (2006). Sol-gel yöntemiyle hazırlanan bakır oksit ince filmlerin elektriksel, yapısal ve optiksel özelliklerinin incelenmesi. Y. Lisans Tezi, Ankara Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Türkiye.
- Ilchuk, H., Zmiiovska, E., Petrus, R., Semkiv, I., Lopatynskiy, I., ve Kashuba, A. 2020. Optical properties of CdMnTe film: Experimental and theoretical aspects.
- Ishizaka, K., Bahramy, M. S., Murakawa, H., Sakano, M., Shimojima, T., Sonobe, T., Koizumi, K., Shin, S., Miyahara, H., Kimura, A., Miyamoto, K., Okuda, T., Namatame, H., Taniguchi, M., Arita, R., Nagaosa, N., Kobayashi, K., Murakami, Y., Kumai, R., ve Tokura, Y. 2011. Giant Rashba-type spin splitting in bulk BiTeI. *Nature Materials*, 10(7), 521-526.
- Ivchenko, E., ve Pikus, G. 1978. New photogalvanic effect in gyrotropic crystals. *ZhETF Pisma Redaktsiui*, 27, 640.
- Jiang Y, Wang W, Jing C, Cao C, Chu J (2011). Sol-gel synthesis, structure and magnetic properties of Mn-doped ZnO diluted magnetic semiconductors. *Materials Science and Engineering B*, 176:1301– 1306
- Kapon, E., Hwang, D. M., ve Bhat, R. 1989. Stimulated emission in semiconductor quantum wire heterostructures. *Physical Review Letters*, 63(4), 430-433.
- Kazarinov, R., ve Suris, R. 1971. Possible amplification of electromagnetic waves in a semiconductor with a superlattice. *Fiz. Tekh. Poluprovodn.*, 5, 797-800.
- Keldysh, L. V. 1962. Fizika tverdogo tela. *Sov. Phys. Solid State*.
- King, P. D. C., Hatch, R. C., Bianchi, M., Ovsyannikov, R., Lupulescu, C., Landolt, G., Slomski, B., Dil, J. H., Guan, D., Mi, J. L., Rienks, E. D. L., Fink, J., Lindblad, A., Svensson, S., Bao, S., Balakrishnan, G., Iversen, B. B., Osterwalder, J., Eberhardt, W., ve Hofmann, Ph. 2011. Large Tunable Rashba Spin Splitting of a Two-Dimensional Electron Gas in Bi₂Se₃. *Physical Review Letters*, 107(9), 096802.
- Kittel, C. 2005. Introduction to solid state physics. John Wiley & sons, inc.

- Komarov, A., Riabchenko, S., Terletsii, O., Zheru, I., ve Ivanchuk, R. 1977. Magneto-optical studies and the double opticomagnetic resonance of the exciton band in Mn²⁺-doped CdTe. *Zhurnal Eksperimentalnoi I Teoreticheskoi Fiziki*, 73, 608-618.
- Koo, H. C., Kwon, J. H., Eom, J., Chang, J., Han, S. H., ve Johnson, M. 2009. Control of Spin Precession in a Spin-Injected Field Effect Transistor. *Science*, 325(5947), 1515-1518.
- Krebs, O., Benjamin, E., ve Lemaître, A. 2009. Magnetic anisotropy of singly Mn-doped InAs/GaAs quantum dots. *Physical Review B*, 80(16), 165315.
- Kummer, E. E. 1837. De integralibus quibusdam definitis et seriebus infinitis. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1837(17), 228-242.
- Landau, L. D., ve Lifshitz, E. M. 2013. *Quantum mechanics: Non-relativistic theory (C. 3)*. Elsevier.
- LaShell, S., McDougall, B. A., ve Jensen, E. 1996. Spin Splitting of an Au(111) Surface State Band Observed with Angle Resolved Photoelectron Spectroscopy. *Physical Review Letters*, 77(16), 3419-3422.
- Le Gall, C., Besombes, L., Boukari, H., Kolodka, R., Cibert, J., ve Mariette, H. 2009. Optical Spin Orientation of a Single Manganese Atom in a Semiconductor Quantum Dot Using Quasiresonant Photoexcitation. *Physical Review Letters*, 102(12), 127402.
- Le Gall, C., Kolodka, R. S., Cao, C. L., Boukari, H., Mariette, H., Fernández-Rossier, J., ve Besombes, L. 2010. Optical initialization, readout, and dynamics of a Mn spin in a quantum dot. *Physical Review B*, 81(24), 245315.
- Léger, Y., Besombes, L., Fernández-Rossier, J., Maingault, L., ve Mariette, H. 2006. Electrical Control of a Single Mn Atom in a Quantum Dot. *Physical Review Letters*, 97(10), 107401.
- Liu H, Yang J, Hua Z, Liu Y, Yang L, Zhang Y, Cao J (2011). Cu-doping effect on structure and magnetic properties of Fe-doped ZnO powders. *Materials Chemistry and Physics*, 125 :656–659
- Lu, M., Zieve, R. J., Van Hulst, A., Jaeger, H. M., Rosenbaum, T. F., ve Radelaar, S. 1996. Low-temperature electrical-transport properties of single-crystal bismuth films under pressure. *Physical Review B*, 53(3), 1609-1615.
- Manchon, A., Koo, H. C., Nitta, J., Frolov, S. M., ve Duine, R. A. 2015. New perspectives for Rashba spin-orbit coupling. *Nature Materials*, 14(9), 871-882.
- Miller, D. A. 1990. Optoelectronic applications of quantum wells. *Opt. Photon. News*, 1(1), 7-15.
- Munekata, H., Ohno, H., Von Molnar, S., Segmüller, A., Chang, L. L., ve Esaki, L. 1989. Diluted magnetic III-V semiconductors. *Physical Review Letters*, 63(17), 1849-1852.
- Nakamura, H., Koga, T., ve Kimura, T. 2012. Experimental Evidence of Cubic Rashba Effect in an Inversion-Symmetric Oxide. *Physical Review Letters*, 108(20), 206601.
- Nitta, J., Akazaki, T., Takayanagi, H., ve Enoki, T. 1997. Gate Control of Spin-Orbit Interaction in an Inverted In_{0.53}Ga_{0.47}As/In_{0.52}Al_{0.48}As Heterostructure. *Physical Review Letters*, 78(7), 1335-1338.
- Ohno, H., Munekata, H., Penney, T., Von Molnár, S., ve Chang, L. L. 1992. Magnetotransport properties of p-type (In,Mn)As diluted magnetic III-V semiconductors. *Physical Review Letters*, 68(17), 2664-2667.
- Osborn, G. C. 1982. Strained-layer superlattices from lattice mismatched materials. *Journal of Applied Physics*, 53(3), 1586-1589.
- Peierls, R. 1930. Zur Theorie der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit von Metalle n. *Annalen der Physik*, 396(2), 121-148.
- Peter, Y., ve Cardona, M. 2010. *Fundamentals of semiconductors: Physics and materials properties*. Springer Science & Business Media.
- Rashba, E. 1960. Properties of semiconductors with an extremum loop. I. Cyclotron and combinatorial resonance in a magnetic field perpendicular to the plane of the loop. *Sov. Phys.-Solid State*, 2, 1109.

- Reiter, D. E., Kuhn, T., ve Axt, V. M. 2009. All-Optical Spin Manipulation of a Single Manganese Atom in a Quantum Dot. *Physical Review Letters*, 102(17), 177403.
- Sadeghi, E., ve Alirezaie, S. 2013. Effect of incident light polarization on optical properties of an ellipsoidal quantum dot. *Superlattices and Microstructures*, 54, 128-136.
- Sadeghi, E., Moradi Lm, M. 2016. Optical properties of a two-electron system in a double ellipsoidal quantum dot. *Chinese Journal of Physics*, 54(5), 773-779.
- Sasaki, S., Austing, D. G., ve Tarucha, S. 1998. Spin states in circular and elliptical quantum dots. *Physica B: Condensed Matter*, 256-258, 157-160.
- Schultz, M., Heinrichs, F., Merkt, U., Colin, T., Skauli, T., ve Løvold, S. 1996. Rashba spin splitting in a gated HgTe quantum well. *Semiconductor Science and Technology*, 11(8), 1168-1172.
- Sirenko, A. A., Ruf, T., Cardona, M., Yakovlev, D. R., Ossau, W., Waag, A., ve Landwehr, G. 1997. Electron and hole g factors measured by spin-flip Raman scattering in CdTe/Cd_{1-x}Mg_xTe single quantum wells. *Physical Review B*, 56(4), 2114-2119.
- Varykhalov, A., Marchenko, D., Scholz, M. R., Rienks, E. D. L., Kim, T. K., Bihlmayer, G., Sánchez-Barriga, J., ve Rader, O. 2012. Ir(111) Surface State with Giant Rashba Splitting Persists under Graphene in Air. *Physical Review Letters*, 108(6), 066804.
- Vas'ko, F. 1979. Spin splitting in the spectrum of two-dimensional electrons due to the surface potential. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 30, 541.
- Vorobyev, L. E., Ivchenko, E. I., Firsov, D. A., ve Shalygin, V. A. (2001). Optical Property of Nanostructures. Nauka.
- Willardson, R. K., ve Beer, A. C. 1977. *Semiconductors and semimetals*. Academic press.
- Winkler, R. 2003. *Spin-orbit coupling effects in two-dimensional electron and hole systems*. Springer.
- Zaleszczyk, W., Janik, E., Presz, A., Dłużewski, P., Kret, S., Szuszkiewicz, W., Morhange, J.-F., Dynowska, E., Kirmse, H., Neumann, W., Petrouchik, A., Baczewski, L. T., Karczewski, G., ve Wojtowicz, T. 2008. Zn_{1-x}Mn_xTe Diluted Magnetic Semiconductor Nanowires Grown by Molecular Beam Epitaxy. *Nano Letters*, 8(11), 4061-4065.
- Zamani, A., Azargoshasb, T., Niknam, E., ve Mohammadhosseini, E. 2017. Absorption coefficient and refractive index changes of a lens-shaped quantum dot: Rashba and Dresselhaus spin-orbit interactions under external fields. *Optik*, 142, 273-281.